



# **Théorie géométrique des groupes**

**Printemps 2019**

**Rémi Coulon**






# Table des matières

	<b>Références</b> .....	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Généralités sur les groupes</b> .....	<b>7</b>
<b>1.1</b>	<b>Groupes de type fini</b>	<b>7</b>
1.1.1	Grphe de Cayley .....	7
1.1.2	Digression sur les graphes .....	8
<b>1.2</b>	<b>Quasi-isométries</b>	<b>8</b>
1.2.1	Définition .....	8
1.2.2	Lien entre groupe et géométrie .....	10
<b>1.3</b>	<b>Quelques spécimens dans le bestiaire des groupes</b>	<b>11</b>
1.3.1	Groupes libres .....	11
1.3.2	Groupes de présentation finie .....	11
1.3.3	Groupes de surfaces .....	12
1.3.4	Produit libre. ....	12
<b>2</b>	<b>Action de groupe sur un arbre</b> .....	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Définitions</b>	<b>15</b>
2.1.1	Arbre simplicial et arbre réel .....	15
2.1.2	Exemples d'action sur un arbre .....	16
<b>2.2</b>	<b>Isométries d'un arbre</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Problèmes et exercices</b>	<b>20</b>
2.3.1	Lemme de Serre .....	20

<b>3</b>	<b>Espaces hyperboliques (au sens de Gromov)</b> .....	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Définition et triangles fins</b>	<b>21</b>
3.1.1	Les triangles fins .....	22
<b>3.2</b>	<b>L'espace hyperbolique <math>H^n</math></b>	<b>23</b>
3.2.1	Le plan hyperbolique. ....	24
3.2.2	Isométries. ....	25
3.2.3	L'espace hyperbolique en dimension supérieur. ....	26
<b>3.3</b>	<b>D'autres exemples/non-exemples d'espaces hyperboliques.</b>	<b>27</b>
<b>3.4</b>	<b>Invariance par quasi-isométries</b>	<b>27</b>
<b>3.5</b>	<b>Ultra-limite d'espace métrique</b>	<b>29</b>
<b>3.6</b>	<b>Stabilité des quasi-géodésiques</b>	<b>31</b>
3.6.1	Le cas limite. ....	31
3.6.2	Le cas général. ....	31
<b>3.7</b>	<b>Groupes hyperboliques</b>	<b>33</b>
<b>3.8</b>	<b>Problèmes et exercices</b>	<b>34</b>
3.8.1	Stabilité des quasi-géodésiques locales .....	34
3.8.2	Cone asymptotique .....	35
3.8.3	Groupe d'automorphisme extérieur d'un groupe hyperbolique .....	35
<b>4</b>	<b>Isométries d'un espace hyperbolique</b> .....	<b>37</b>
<b>4.1</b>	<b>Longueurs de translation</b>	<b>37</b>
<b>4.2</b>	<b>Interlude : quasi-convexité</b>	<b>39</b>
<b>4.3</b>	<b>Ensemble caractéristique</b>	<b>41</b>
<b>4.4</b>	<b>Études des isométries selon leur type</b>	<b>43</b>
4.4.1	Isométries elliptiques. ....	43
4.4.2	Isométries loxodromiques. ....	44
4.4.3	Isométries paraboliques. ....	45
<b>4.5</b>	<b>Problèmes et exercices</b>	<b>48</b>
4.5.1	Sous-groupes d'un groupe hyperbolique. ....	49
<b>5</b>	<b>Le bord à l'infini d'un espace hyperbolique</b> .....	<b>53</b>



## Références

Quelques ouvrages généraux sur le sujet.

- Martin R. Bridson, André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319 (1999) ISBN 3-540-64324-9
- Matt Clay, Dan Margalit, *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, Princeton University Press (2017) ISBN 9780691158662
- Michel Coornaert, Thomas Delzant, Athanase Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes*, Springer Lecture Notes 1441 (1990) ISBN 3-540-52977-2
- Étienne Ghys, Pierre de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Birkhäuser (1990) ISBN 0-8176-3508-4
- Clara Löh, *Geometric Group Theory*, Springer Universitext (2017) ISBN 9783319722535



# 1. Généralités sur les groupes

## 1.1 Groupes de type fini

**Definition 1.1.1 — Groupe de type fini.** Un groupe  $G$  est de *type fini* s'il existe une partie finie  $S \subset G$  de sorte que tout élément  $g \in G$  admet une écriture de la forme  $g = s_1 s_2 \dots s_m$  où  $s_i \in S \cup S^{-1}$ .

**Vocabulary 1.1** On dit que  $S$  est une *partie génératrice* de  $G$  ou que  $S$  engendre  $G$ .

■ **Exemple 1.1** Les groupes finis sont de type fini. Les groupes  $\mathbf{Z}^n$  et  $\text{GL}(n, \mathbf{Z})$  sont de type fini pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ . Le groupe  $\mathbf{Q}$  n'est pas de type fini. ■

### 1.1.1 Graphe de Cayley

Le graphe de Cayley est une manière géométrique de représenter un groupe. Il est parfois présenté comme un analogue de la table de groupe.

**Definition 1.1.2** Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S$  une partie génératrice de  $G$ . Le *graphe de Cayley* de  $G$  relativement à  $S$  est le graphe (non orienté) dont l'ensemble des sommets est  $G$ . Deux sommets  $g_1, g_2 \in G$  sont reliés par une arête s'il existe  $s \in S \cup S^{-1}$  tel que  $g_2 = g_1 s$ . On le notera  $\text{Cay}(G, S)$ .

**Exercice 1.1** Montrer que  $\text{Cay}(G, S)$  est connexe. ■

■ **Exemple 1.2**

- (i) Le graphe de Cayley de  $\mathbf{Z}^2$  engendré par  $S = \{a, b\}$  où  $a = (1, 0)$  et  $b = (0, 1)$ .
- (ii) Le graphe de Cayley de  $\mathbf{Z}$  engendré par  $S = \{1\}$
- (iii) Le graphe de Cayley de  $\mathbf{Z}$  engendré par  $S = \{1, n\}$  avec  $n \in \mathbf{N}$ .

Comme on le voit sur les derniers exemples, le graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  dépend de la partie génératrice  $S$ .

### Métrie sur le graphe de Cayley

On décrète que chaque arête du graphe est isométrique à l'intervalle  $[0, 1]$ . La distance entre deux points dans  $\text{Cay}(G, S)$  est la longueur du plus petit chemin qui les relie. En particulier si  $g_1, g_2 \in G$  sont deux sommets de  $\text{Cay}(G, S)$  alors  $d(g_1, g_2) = m$  où  $m$  est le plus petit entier tel que

$$g_1^{-1}g_2 = s_1s_2 \dots s_m,$$

avec  $s_i \in S \cup S^{-1}$ . On parle aussi de *métrie des mots* sur  $G$ .

### Action de groupe sur le graphe de Cayley.

Le groupe  $G$  agit naturellement à gauche sur  $G$  : l'action à gauche de  $G$  sur lui-même définit une action de  $G$  sur l'ensemble des sommets de  $\text{Cay}(G, S)$ . Cette action préserve la structure de graphe (elle envoie arête sur arête). En particulier  $G$  agit par *isométries* sur  $\text{Cay}(G, S)$ .

#### 1.1.2 Digression sur les graphes

Dans certains cas il est commode d'utiliser une définition plus formelle de graphe.

**Definition 1.1.3** Un *graphe* (non orienté) est la donnée d'une paire  $\Gamma = (V, E)$  muni de

- (i) deux applications  $o: E \rightarrow V$  et  $t: E \rightarrow V$ ,
  - (ii) une involution sans points fixes  $E \rightarrow E$ , notée  $e \rightarrow \bar{e}$ ,
- telles que pour tout  $e \in E$ , on a  $o(\bar{e}) = t(e)$ .

Dans ce contexte,  $V$  est l'ensemble des sommets,  $E$  est l'ensemble des arêtes. On pense aux arêtes comme des arêtes orientées. L'involution  $e \rightarrow \bar{e}$  renverse l'orientation. Puisque chaque arête vient  $e$  vient avec son arête opposée  $\bar{e}$ , le graphe est un graphe non orienté. L'application  $o: E \rightarrow V$  donne le sommet *origine* de  $e$  et  $t: E \rightarrow V$  donne le sommet *terminal*.

Dans ce cadre le graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  se décrit de la manière suivante. L'ensemble des sommets est  $V = G$ . L'ensemble des arêtes est  $E = G \times (S \cup S^{-1})$ . Les applications  $o: E \rightarrow V$  et  $t: E \rightarrow V$  sont définies de la manière suivante :  $o(g, s) = g$  et  $t(g, s) = gs$ . L'involution  $e \rightarrow \bar{e}$  qui renverse l'orientation des arêtes est donnée par  $(g, s) \rightarrow (gs, s^{-1})$ .

## 1.2 Quasi-isométries

### 1.2.1 Définition

Le graphe Cayley d'un groupe  $G$  dépend de la partie génératrice  $S$  choisie. On souhaiterait identifier deux graphes de Cayley s'il l'un est une « déformation » raisonnable de l'autre et vice versa. C'est cette notion de déformation que l'on va maintenant expliciter.

**Definition 1.2.1** Une application  $f: X \rightarrow Y$  entre deux espaces métriques est *Lipschitz à large échelle* s'il existe  $A \geq 1$  et  $B \geq 0$  tels que pour tout  $x, x' \in X$  on a

$$d(f(x), f(x')) \leq Ad(x, x') + B$$

On dit que  $f$  est une *quasi-isométrie* s'il existe une application  $g: Y \rightarrow X$  qui est Lipschitz à large échelle et une constante  $C \geq 0$  telles que pour tout  $x \in X$  et  $y \in Y$  on a

$$d(g \circ f(x), x) \leq C \quad \text{et} \quad d(f \circ g(y), y) \leq C.$$

**Exercice 1.2** Une application  $f: X \rightarrow Y$  est



(i) un plongement quasi-isométrique s'il existe  $A \geq 1$  et  $B \geq 0$  tel que pour tout  $x, x' \in X$  on a

$$\frac{1}{A}d(x, x') - B \leq d(f(x), f(x')) \leq Ad(x, x') + B$$

(ii) quasi-surjective s'il existe  $C \in \mathbf{R}_+$  tel que tout point de  $Y$  est à distance au plus  $C$  d'un point de  $f(X)$ .

Montrer que  $f: X \rightarrow Y$  est une quasi-isométrie si et seulement si c'est un plongement quasi-isométrique quasi-surjectif. ■

On dit que deux espace  $X$  et  $Y$  sont *quasi-isométriques* s'il existe une quasi-isométrie de  $X$  vers  $Y$ .

**Exercice 1.3** Montrer que « être quasi-isométrique » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces métriques. ■

### ■ Exemple 1.3

- (i) Toute ensemble borné est quasi-isométrique à un point.
- (ii)  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Q}$  sont quasi-isométriques.
- (iii)  $\mathbf{R} \times [0, 1]$  est  $\mathbf{R}$  sont quasi-isométriques.
- (iv)  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$  ne sont pas quasi-isométriques (cf. exercice 1.4). ■

**Proposition 1.2.1** Soit  $G$  un groupe de type fini. Si  $S$  et  $T$  sont deux parties génératrices finies de  $G$  alors  $\text{Cay}(G, S)$  et  $\text{Cay}(G, T)$  sont quasi-isométriques.

*Démonstration.* Pour simplifier on notera  $d_S$  et  $d_T$  les distances respectives des graphes  $\text{Cay}(G, S)$  et  $\text{Cay}(G, T)$ . En utilisant l'exercice 1.2 on voit que  $(G, d_S)$  est quasi-isométrique à  $\text{Cay}(G, S)$ . De même avec  $T$ . Il suffit donc de montrer que  $(G, d_S)$  et  $(G, d_T)$  sont quasi-isométriques. Puisque  $T$  est fini on peut poser

$$C = \max_{t \in T \cup T^{-1}} d_S(1, t).$$

Soient  $g_1, g_2 \in G$ . Par définition  $d_T(g_1, g_2)$  est le plus petit entier  $m$  de sorte que  $g_1^{-1}g_2 = t_1 t_2 \dots t_m$  avec  $t_i \in T \cup T^{-1}$ . Rappelons que  $G$  agit par isométries à gauche sur  $\text{Cay}(G, S)$  En utilisant l'inégalité triangulaire on voit que

$$d_S(g_1, g_2) = d_S(1, g_1^{-1}g_2) \leq \sum_{i=1}^m d_S(t_1 \dots t_{i-1}, t_1 \dots t_i) = \sum_{i=1}^m d_S(1, t_i) \leq Cm,$$

(par convention le produit vide représente l'élément neutre). Autrement dit pour tout  $g_1, g_2 \in G$  on a

$$d_S(g_1, g_2) \leq Cd_T(g_1, g_2).$$

Ainsi l'identité définit une application Lipschitz de  $(G, d_S)$  dans  $(G, d_T)$ . Par symétrie, l'identité définit aussi une application Lipschitz de  $(G, d_T)$  dans  $(G, d_S)$ . La composition de ces deux applications (dans les deux sens) est l'identité (!) Donc  $(G, d_S)$  et  $(G, d_T)$  sont quasi-isométriques. ■

### Philosophie

Lorsqu'on souhaite définir une notion géométrique sur un groupe  $G$  à partir de son graphe de Cayley, on cherche de préférence une notion invariante par quasi-isométrie. Ainsi cette définition ne dépend pas du graphe de Cayley mais uniquement du groupe.

**R** Une quasi-isométrie entre deux groupes n'est pas tenu de respecter la loi de groupe.

### 1.2.2 Lien entre groupe et géométrie

On se donne un espace métrique  $(X, d)$ . Un *chemin* entre deux points  $x, y \in X$  est une application continue  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  telle que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ . Une *géodésique* dans  $X$  est un chemin  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  tel que pour tout  $s, t \in I$  on a  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ . L'espace  $X$  est *géodésique* si deux points quelconques de  $X$  sont reliés par une géodésique (on notera que cette géodésique n'est pas forcément unique).

**Definition 1.2.2** Soit  $G$  un groupe agissant par isométries sur un espace métrique  $X$ . On dit que l'action est

- (i) *propre* si pour tout  $x \in X$ , pour tout  $r \in \mathbf{R}_+$ , l'ensemble  $\{g \in G : d(gx, x) \leq r\}$  est fini ;
- (ii) *co-bornée* s'il existe  $x \in X$  et  $r \in \mathbf{R}_+$  tel que  $G \cdot B(x, r)$  recouvre  $X$ .

La définition ci-dessus s'appuie sur les propriétés *métriques* de l'action. Dans certains cas on privilégie plutôt le point de vue *topologique*. Par exemple on dira que l'action est *proprement discontinue* si pour tout pour toute partie compacte  $K \subset X$ , l'ensemble  $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$  est fini. De façon analogue l'action est *co-compacte* s'il existe une partie compacte  $K \subset X$  telle que  $G \cdot K$  recouvre  $X$ . Lorsque l'espace métrique  $X$  est *propre* (c'est à dire que toutes les boules fermées de  $X$  sont compactes) alors

- l'action de  $G$  est propre si et seulement si elle est proprement discontinue ;
- l'action de  $G$  est co-bornée si et seulement si elle est co-compacte.

**Proposition 1.2.2 — Lemme de Milnor-Švarc.** Soit  $(X, d)$  un espace géodésique. Soit  $G$  un groupe agissant par isométries sur  $X$ . Si l'action de  $G$  sur  $X$  est propre et co-bornée alors  $G$  est de type fini. En outre, l'application  $G \rightarrow X$  qui envoie  $g$  sur  $gx$  est une quasi-isométrie.

*Démonstration.* Soit  $x \in X$ . Puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est co-bornée, il existe  $r \geq 0$  tel que  $G \cdot B(x, r)$  recouvre  $X$ . On note alors  $S = \{g \in G : d(gx, x) \leq 3r\}$ . Puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est propre,  $S$  est fini. En outre  $S = S^{-1}$ .

Montrons que  $S$  engendre  $G$ . Soit  $g \in G$ . On se donne une géodésique  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  entre  $x$  et  $gx$ . On fixe une subdivision  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$  de  $[a, b]$  de sorte que  $d(t_i, t_{i+1}) = r$  pour tout  $i \in \{0, \dots, m-2\}$  et  $d(t_{m-1}, t_m) < r$ . Comme  $G \cdot B(x, r)$  recouvre  $X$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$ , il existe  $g_i \in G$ , tel que  $d(g_i x, \gamma(t_i)) \leq r$ . Sans perte de généralité, on peut prendre  $g_0 = 1$  et  $g_m = g$ . Puisque  $\gamma$  est une géodésique l'inégalité triangulaire entraîne que pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$

$$d(g_i^{-1} g_{i+1} x, x) = d(g_{i+1} x, g_i x) \leq d(g_{i+1} x, \gamma(t_{i+1})) + d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), g_i x) \leq 3r.$$

En particulier  $g_i^{-1} g_{i+1}$  est un élément de  $S$ . Rappelons que  $g_0 = 1$  et  $g_m = g$ . Ainsi

$$g = g_0^{-1} g_m = (g_0^{-1} g_1) (g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{m-1}^{-1} g_m).$$

Autrement dit  $g$  s'écrit comme un mot sur l'alphabet  $S$ , donc  $S$  engendre  $G$ . Notons  $d_S$  la métrique des mots sur  $G$  relativement à  $S$ . On observe au passage que

$$d_S(1, g) \leq m \leq \frac{1}{r} d(x, gx) + 1 \tag{1.1}$$

On s'intéresse maintenant à l'application  $G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto gx$ . Comme  $G \cdot B(x, r)$  recouvre  $X$ , cette application est quasi-surjective. Il suffit donc de montrer que c'est une plongement quasi-isométrique. On remarque d'abord que (1.1) entraîne que pour tout  $g_1, g_2 \in G$ ,

$$rd_S(g_1, g_2) - r \leq d(g_1 x, g_2 x)$$

On s'intéresse maintenant à l'autre inégalité. On pose

$$C = \max_{s \in S} d(x, sx).$$

Soient  $g_1, g_2 \in G$ . On pose  $m = d_S(g_1, g_2)$  ce qui signifie que l'on peut écrire  $g_2 = g_1 s_1 s_2 \dots s_m$  ou  $s_m \in S$ . L'inégalité triangulaire nous dit alors que

$$d(g_1 x, g_2 x) \leq \sum_{i=1}^m d(g_1 s_1 \dots s_{i-1} x, g_1 s_1 \dots s_i x) = \sum_{i=1}^m d(x, s_i x) \leq Cm = Cd_S(g_1, g_2).$$

**R** Il est recommandé de faire un dessin plutôt que de suivre le calcul !

Ainsi pour tout  $g_1, g_2 \in G$  on a

$$rd_S(g_1, g_2) - r \leq d(g_1 x, g_2 x) \leq Cd_S(g_1, g_2). \quad \blacksquare$$

**Exercice 1.4** Montrer que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$  ne sont pas quasi-isométriques. En déduire que  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Z}^2$  ne sont pas quasi-isométriques.

*Hint : on pourra s'inspirer de la preuve que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$  ne sont pas homéomorphes.* ■

## 1.3 Quelques spécimens dans le bestiaire des groupes

### 1.3.1 Groupes libres

Étant donné un ensemble  $S$  (pas nécessairement fini) le *groupe libre* engendré par  $S$ , que l'on notera  $\mathbf{F}(S)$  est défini par la propriété universelle suivante.

**Proposition 1.3.1** Soit  $S$  un ensemble. Il existe une groupe  $\mathbf{F}(S)$ , unique à isomorphisme près, tel que pour tout groupe  $G$ , pour toute application  $\varphi : S \rightarrow G$ , il existe un unique morphisme de groupe  $\psi : \mathbf{F}(S) \rightarrow G$  qui étend  $\varphi$ .

L'ensemble  $S$  est appelé *base libre* de  $\mathbf{F}(S)$ . Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux ensemble de même cardinal alors  $\mathbf{F}(S_1)$  et  $\mathbf{F}(S_2)$  sont isomorphes. On notera donc  $\mathbf{F}_r$  le groupe libre engendré par un ensemble à  $r$  éléments. On dit alors que  $r$  est le *rang* de  $\mathbf{F}_r$ .

**Concrètement...**

- On se donne  $r$  lettres,  $x_1, \dots, x_r$ . Le groupe libre  $\mathbf{F}_r$  est l'ensemble des mots sur l'alphabet  $\{x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}\}$  qui sont *réduits*, c'est à dire ne contenant pas  $x_i x_i^{-1}$  ou  $x_i^{-1} x_i$ . La loi de groupe est obtenu en concaténant les mots et simplifiant toutes les occurrences de  $x_i x_i^{-1}$  ou  $x_i^{-1} x_i$ .
- On peut voir aussi le groupe libre  $\mathbf{F}_r$  comme le groupe fondamental d'une rose à  $r$ -pétales. Plus généralement le groupe fondamental d'un graphe (connexe)  $\Gamma$  est un groupe libre.

Le graphe de Cayley de  $\mathbf{F}_r$  relativement à  $\{x_1, \dots, x_r\}$  est un arbre régulier de valence  $2r$ . En particulier  $\mathbf{F}_r$  agit par isométries sur un arbre... exemple par excellence d'espace à courbure négative !

**R** Soit  $G$  un groupe. Si  $S$  est une partie génératrice de  $G$  alors  $G$  est un quotient de  $\mathbf{F}(S)$ .

### 1.3.2 Groupes de présentation finie

**Définition 1.3.1** Un groupe  $G$  est de *présentation finie* s'il existe un ensemble fini  $S$  et une partie finie  $R \subset \mathbf{F}(S)$  tel que  $G$  est isomorphe au quotient  $\mathbf{F}(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$ . On dit alors que  $\langle S \mid R \rangle$  est une *présentation finie* de  $G$ .

■ **Exemple 1.4**

- (i)  $\mathbf{F}_r = \langle x_1, \dots, x_r \mid \emptyset \rangle$ .
- (ii)  $\mathbf{Z}^2 = \langle a, b \mid [a, b] \rangle$ . On peut aussi écrire  $\langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$  ou  $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$ .

- (iii)  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \langle a \mid a^n \rangle$ .
- (iv)  $\mathbf{D}_n = \langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^n \rangle = \langle s, r \mid s^2, (sr)^2, r^n \rangle$ .
- (v) Une présentation du groupe d'Heisenberg discret est l'ensemble des matrices

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : p, q, r \in \mathbf{Z} \right\}$$

Une présentation de ce groupe est  $\langle a, b, c \mid c = [a, b], [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$ .

■

### 1.3.3 Groupes de surfaces

Soit  $g \in \mathbf{N}$ . Soit  $\Sigma$  une surface de genre  $g$ . Une présentation du groupe fondamental de  $\Sigma$  est

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Le revêtement universel de  $\Sigma$  est

- (i) La sphère de dimension 2 si  $g = 0$ .
- (ii) Le plan euclidien  $\mathbf{R}^2$  si  $g = 1$ .
- (iii) Le plan hyperbolique  $\mathbf{H}^2$  si  $g \geq 2$ .

Supposons que  $g \geq 2$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(\Sigma)$  agit sur  $\mathbf{H}^2$  de manière proprement discontinue et co-compacte. Aussi  $\pi_1(\Sigma)$  et  $\mathbf{H}^2$  sont quasi-isométrique... un autre exemple où la courbure négative pointe sont nez.

### 1.3.4 Produit libre.

Comme le groupe libre, le produit libre  $A_1 * A_2$  de deux groupes  $A_1$  et  $A_2$  est défini par une propriété universelle.

**Proposition 1.3.2** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux groupes. Il existe un groupe  $A_1 * A_2$ , unique à isomorphisme près ainsi que deux plongement  $\iota_1 : A_1 \rightarrow A_1 * A_2$  et  $\iota_2 : A_2 \rightarrow A_1 * A_2$  vérifiant la propriété suivante. Soient  $G$  un groupe. Soient  $\varphi_1 : A_1 \rightarrow G$  et  $\varphi_2 : A_2 \rightarrow G$  deux morphismes de groupes. Il existe un unique morphisme de groupe  $\psi : A_1 * A_2 \rightarrow G$  tel que  $\psi \circ \iota_1 = \varphi_1$  et  $\psi \circ \iota_2 = \varphi_2$ .

Faire le diagramme commutatif...

**Vocabulary 1.2** On dit que  $A_1$  et  $A_2$  sont des *facteurs libres* de  $A_1 * A_2$ .

*Démonstration.* On commence par construire  $A_1 * A_2$ . Pour cela, on note  $\mathscr{W}$  l'ensemble des suites finies  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  de longueur  $m \in \mathbf{N}$  quelconque où chaque  $a_i$  est un élément de  $A_1$  ou  $A_2$ . On autorise la suite vide que l'on note  $\varepsilon$ . Si  $w$  et  $w'$  sont deux éléments de  $\mathscr{W}$  on note  $ww'$  leur concaténation. La concaténation définit une loi d'opération interne associative sur  $\mathscr{W}$  dont le neutre est  $\varepsilon$ . On définit maintenant une relation binaire sur  $\mathscr{W}$  de la manière suivante. On commence par des « relations élémentaires ». On décrète que

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m) \sim (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m)$$

si  $a_k$  et  $a_{k+1}$  sont tous les deux dans  $A_1$  ou tous les deux dans  $A_2$ . Par ailleurs

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) \sim (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m)$$

si  $a_i$  est l'élément neutre de  $A_1$  ou de  $A_2$ . On dit maintenant que deux suites  $w, w' \in \mathscr{W}$  sont en relation et on note  $w \equiv w'$  s'il existe une suite  $w = w_0, w_1, \dots, w_p = w'$  d'éléments de  $\mathscr{W}$  telle que pour tout  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ , on a  $w_j \sim w_{j+1}$ . On observe que la relation  $\equiv$  ainsi définie est une relation d'équivalence. On définit  $A_1 * A_2$  comme le quotient  $\mathscr{W} / \equiv$  et on note  $[a_1, \dots, a_m]$  la classe

d'équivalence de  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{W}$ . On vérifie que  $\equiv$  est compatible avec la concaténation, c'est à dire, si  $w_1, w_2$  et  $w$  sont trois éléments de  $\mathcal{W}$  avec  $w_1 \equiv w_2$  alors  $ww_1 \equiv ww_2$  et  $w_1w \equiv w_2w$ . Il en résulte que la concaténation induit une loi d'opération interne sur  $A_1 * A_2$  qui est associative et dont le neutre est  $[\varepsilon]$ . Tout élément de  $A_1 * A_2$  admet un inverse : en effet l'inverse de  $[a_1, \dots, a_m]$  est  $[a_m^{-1}, \dots, a_1^{-1}]$ . Par conséquent  $A_1 * A_2$  est un groupe. L'application  $\iota_i: A_i \rightarrow A_1 * A_2$  qui envoie  $a$  sur  $[a]$  est un morphisme de groupe.

On montre maintenant que  $A_1 * A_2$  vérifie la propriété universelle. Pour cela on se donne un groupe  $G$  ainsi que deux morphismes  $\varphi_1: A_1 \rightarrow G$  et  $\varphi_2: A_2 \rightarrow G$ . On commence par définir une application  $\psi: \mathcal{W} \rightarrow G$  de la manière suivante. Si  $w = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  est une suite de  $\mathcal{W}$ , alors

$$\psi(w) = \varphi_{i_1}(a_1)\varphi_{i_2}(a_2)\dots\varphi_{i_m}(a_m).$$

où  $i_k$  vaut 1 ou 2 selon que  $a_k$  appartient à  $A_1$  ou  $A_2$ . Observons que si  $w$  et  $w'$  sont deux éléments de  $\mathcal{W}$  alors  $\psi(ww') = \psi(w)\psi(w')$ . Par ailleurs si  $w$  et  $w'$  sont équivalents, alors  $\psi(w) = \psi(w')$ . Par conséquent  $\psi$  induit un morphisme de groupe de  $A_1 * A_2 \rightarrow G$  que par abus de notation on notera encore  $\psi$ . On vérifie aisément que  $\psi \circ \iota_i = \varphi_i$ . On a donc démontré l'existence de l'application  $\psi$ . Montrons maintenant son unicité. On se donne maintenant un élément  $g = [a_1, a_2, \dots, a_m]$  de  $A_1 * A_2$ . Remarquons que

$$g = [a_1][a_2]\dots[a_m] = \iota_{i_1}(a_1)\iota_{i_2}(a_2)\dots\iota_{i_m}(a_m),$$

où  $i_k$  vaut 1 ou 2 selon que  $a_k$  appartient à  $A_1$  ou  $A_2$ . Si  $\psi: A_1 * A_2 \rightarrow G$  est un morphisme de groupe tel que  $\psi \circ \iota_1 = \varphi_1$  et  $\psi \circ \iota_2 = \varphi_2$ , alors nécessairement

$$\psi(g) = \left(\psi \circ \iota_{i_1}(a_1)\right) \left(\psi \circ \iota_{i_2}(a_2)\right) \dots \left(\psi \circ \iota_{i_m}(a_m)\right) = \varphi_{i_1}(a_1)\varphi_{i_2}(a_2)\dots\varphi_{i_m}(a_m).$$

Il n'y a donc qu'une seule manière de définir  $\psi(g)$ .

On n'a pas encore montré que les applications  $\iota_i: A_i \rightarrow A_1 * A_2$  étaient injectives. Cela découle de la propriété universelle. Prenons en effet  $\varphi_1 = \text{Id}_{A_1}$  (l'identité de  $A_1$ ) et  $\varphi_2: A_2 \rightarrow A_1$  le morphisme trivial (qui envoie tous les éléments sur l'élément neutre). La propriété universelle nous donne un morphisme  $\psi: A_1 * A_2 \rightarrow A_1$  qui vérifie en particulier  $\psi \circ \iota_1 = \text{Id}_{A_1}$ . Donc  $\iota_1$  est injective. Par symétrie,  $\iota_2$  aussi.

L'unicité (à isomorphisme près) du groupe  $A_1 * A_2$  est une conséquence de la propriété universelle. ■

#### ■ Exemple 1.5

- (i)  $\mathbf{Z} * \mathbf{Z} = \mathbf{F}_2$ . Plus généralement  $\mathbf{F}_r * \mathbf{Z} = \mathbf{F}_{r+1}$ .
- (ii)  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \mathbf{D}_\infty$  (le groupe diédral infini, autrement dit le groupe d'isométries de  $\mathbf{Z}$ )
- (iii)  $\mathbf{Z}/2 * \mathbf{Z}/3 = \text{PSL}(2, \mathbf{Z})$ . On rappelle au passage que  $\text{PSL}(2, \mathbf{Z})$  agit par isométries sur  $\mathbf{H}^2$ .
- (iv) Théorème de Van Kampen. ■

**Proposition 1.3.3 — Forme normale.** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux groupes. Tout élément  $g \in A_1 * A_2$  s'écrit de manière unique comme un produit  $g = a_1 a_2 \dots a_m$  tel que

- (i) chaque lettre  $a_k$  est un élément *non trivial* de  $A_1$  ou  $A_2$ .
- (ii) deux lettres consécutives ne sont pas dans le même facteur.

*Démonstration.* L'existence de la forme normale est évidente. En effet  $A_1 * A_2$  est engendré par  $A_1$  et  $A_2$ . Le point clef de la proposition est l'unicité. La preuve repose sur une utilisation astucieuse de la propriété universelle. Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des suites  $(a_1, \dots, a_m)$  de longueur finie quelconque telles que

- (i) chaque lettre  $a_k$  est un élément *non trivial* de  $A_1$  ou  $A_2$ .
- (ii) deux lettres consécutives ne sont pas dans le même facteur.

On autorise la suite vide notée  $\varepsilon$ . On va définir une action de  $A_1$  sur  $\mathcal{M}$ . Pour cela on note  $\mathcal{M}_2$ , le sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  composé des suites  $(a_1, \dots, a_m)$  qui débutent pas un élément (non trivial) de  $A_2$ . Par convention on demande que  $\varepsilon$  soit dans  $\mathcal{M}_2$ . On remarque que l'on peut identifier  $\mathcal{M}$  avec  $A_1 \times \mathcal{M}_2$ . La bijection est donnée par

$$\begin{aligned} A_1 \times \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathcal{M} \\ (a, (a_1, \dots, a_m)) &\rightarrow \begin{cases} (a_1, \dots, a_m) & \text{if } a = 1 \\ (a, a_1, \dots, a_m) & \text{if } a \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut donc faire agir  $A_1$  à gauche sur  $\mathcal{M}$  par multiplication à gauche sur le premier facteur de  $A_1 \times \mathcal{M}_2$ .

- R** Concrètement, si  $a \in A_1$  et  $w = (a_1, \dots, a_m)$  appartient à  $\mathcal{M}$  alors deux cas sont possible, soit  $a_1$  est dans  $A_2$  et on ajoute  $a$  au début de la suite  $w$ . Soit  $a_1$  est dans  $A_1$  auquel cas on calcule le produit  $aa_1$ , si celui ci est trivial, on retire  $a_1$  de  $w$ , sinon on remplace  $a_1$  par  $aa_1$  dans  $w$ .

De la même façon on définit une action à gauche de  $A_2$  sur  $\mathcal{M}$ . Si on note  $\mathfrak{S}(\mathcal{M})$  le groupe des permutations de  $\mathcal{M}$ , on a donc deux morphismes de groupes  $A_1 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{M})$  et  $A_2 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{M})$ . D'après la propriété universelle qui définit le produit libre, il existe un unique morphisme de groupe  $A_1 * A_2 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{M})$  qui étend ces deux morphismes. Autrement dit, il existe une unique action de  $A_1 * A_2$  sur  $\mathcal{M}$  qui étend celle de  $A_1$  et  $A_2$ . Si  $g \in A_1 * A_2$  et  $w \in \mathcal{M}$ , on notera  $g \cdot w$  l'image de  $w$  par  $g$ . On se donne alors deux applications

$$\begin{aligned} \varphi: A_1 * A_2 &\rightarrow \mathcal{M} & \psi: \mathcal{M} &\rightarrow A_1 * A_2 \\ g &\rightarrow g \cdot \varepsilon & (a_1, a_2, \dots, a_m) &\rightarrow a_1 a_2 \cdots a_m \end{aligned}$$

On remarque que  $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{M}}$ . Par conséquent  $\psi$  est injective, ce qui signifie exactement que la forme normale est unique. ■

## 2. Action de groupe sur un arbre

### 2.1 Définitions

#### 2.1.1 Arbre simplicial et arbre réel

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe. Un *circuit* est une suite d'arrêtes  $e_1, e_2, \dots, e_m$  telles que pour tout  $i \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ , on a  $t(e_i) = o(e_{i+1})$  (les arrêtes s'enchainent) et  $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$  (on ne rebrousse pas chemin).

■ **Definition 2.1.1** Un *arbre simplicial* est un graphe connexe sans circuit.

■ **Exemple 2.1** Le graphe de Cayley  $\text{Cay}(\mathbf{F}(S), S)$  du groupe libre  $\mathbf{F}(S)$  engendré par  $S$  est un arbre simplicial. ■

Dans la suite du cours on sera amené à regarder des formes plus générales d'arbres. Soit  $X$  un espace métrique. Étant donnés deux points  $x, x' \in X$ , un *arc* de  $x$  à  $x'$  est un homéomorphisme  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = x'$ . Si  $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est un homéomorphisme croissant, l'application  $\gamma \circ \theta$  est encore un arc avec la même image que  $\gamma$ . On dira que  $\gamma \circ \theta$  est une reparamétrisation de  $\gamma$ .

■ **Definition 2.1.2** Un *arbre réel* ( *$\mathbf{R}$ -tree* en anglais) est un espace géodésique  $X$  tel que toute paire de points  $x, x' \in X$  est reliée par un unique arc (à reparamétrisation près).

Il découle de la définition que deux points  $x$  et  $x'$  dans  $X$  sont reliés par une *unique* géodésique. On la note  $[x, x']$ .

#### ■ Exemple 2.2

- (i) Un arbre simplicial est un arbre réel.
- (ii) La *métrique SNCF*  $d_*$  sur  $\mathbf{R}^2$  est définie de la manière suivante. On note  $O$  l'origine de  $\mathbf{R}^2$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux points de  $\mathbf{R}^2$ . Si  $O, P$  et  $Q$  sont alignés on décide que  $d_*(P, Q) = d(P, Q)$ . Sinon on pose  $d_*(P, Q) = d(P, O) + d(O, Q)$ . (Pour aller de Rennes à Marseille en train... il faut passer par Paris !) Le plan  $\mathbf{R}^2$  muni de la métrique SNCF est un arbre réel.
- (iii) Notons  $X = (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$  vu comme sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$ . On muni  $X$  de la métrique de longueur induite par celle de  $\mathbf{R}^2$ . Alors  $X$  est un arbre réel, mais ce n'est pas un arbre simplicial (les points de branchement sont denses le long de  $\mathbf{R} \times \{0\}$ ).

**Todo.** Faire les dessins qui vont avec...

**Exercice 2.1** Soit  $X$  un arbre réel et  $\gamma: [0,1] \rightarrow X$  un chemin continu, localement injectif. Montrer que  $\gamma$  est un arc de  $X$ . ■

**Exercice 2.2** Soient  $x, y$  et  $z$  trois points d'un arbre réels  $X$ . Si  $y$  est le seul point commun entre  $[x,y]$  et  $[y,z]$  alors la concaténation de  $[x,y]$  et  $[y,z]$  est la géodésique entre  $x$  et  $z$ . ■

**Definition 2.1.3** Soit  $X$  un arbre réel. Un *sous-arbre* est une partie convexe  $Y$  de  $X$ , c'est à dire telle que pour tout  $y, y' \in Y$ , la géodésique  $[y, y']$  est entièrement contenue dans  $Y$ .

Par exemple une géodésique de  $X$  est un sous-arbre.

**Exercice 2.3** Soit  $Y$  un sous-arbre fermé d'un arbre réel  $X$ . Soit  $x \in X$ . Montrer qu'il existe une unique point  $y \in Y$  tel que  $d(x, y) = d(x, Y)$ . On appellera ce point la *projection de  $x$  sur  $Y$* . ■

## 2.1.2 Exemples d'action sur un arbre

### Groupes libres

Si  $G$  est un groupe agissant sur un espace  $X$ , on dit que l'action est *libre* si pour tout point  $x \in X$ , le stabilisateur de  $x$  dans  $G$ , c'est à dire le sous-groupe

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

est trivial.

Soit  $S$  un ensemble quelconque. Le groupe libre  $\mathbf{F}(S)$  agit librement par isométries sur son graphe de Cayley  $\text{Cay}(\mathbf{F}(S), S)$  qui est un arbre. Cet énoncé admet une réciproque.

**Theorem 2.1.1** Soit  $T$  un arbre simplicial et  $G$  un groupe agissant par isométries sur  $T$ . Si l'action de  $G$  sur  $T$  est libre alors  $G$  est un groupe libre.

*Esquisse de preuve.* Puisque  $T$  est un arbre, son groupe fondamental est trivial. Par ailleurs  $G$  préserve la structure de graphe de  $X$ . On note  $\Gamma = T/G$  le graphe quotient correspondant. Comme  $G$  agit librement sur  $X$ , la projection canonique  $T \rightarrow \Gamma$  est en fait un revêtement. C'est même un revêtement universel puisque  $X$  est simplement connexe. Il en résulte que  $G$  est le groupe fondamental de  $\Gamma$ , donc un groupe libre. ■

**Corollary 2.1.2** Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.

*Démonstration.* En effet si  $G$  est un groupe libre alors il agit librement sur un arbre  $T$  (par exemple son graphe de Cayley pour une partie génératrice appropriée). Tout sous groupe  $H$  de  $G$  agit a fortiori sans point fixe sur  $T$ . D'après le théorème précédent,  $H$  est un groupe libre. ■

### Produit libre.

Une des manière d'étudier le produit libre  $A_1 * A_2$  (cf paragraphe 1.3.4) est de le faire agir sur un arbre dont on va expliquer maintenant la construction. Pour simplifier les notations on note  $G = A_1 * A_2$ . On construit un graphe  $T$  de la manière suivante.

- L'ensemble  $V$  de ses sommets est l'union disjointe de  $V_1 = G/A_1$  et  $V_2 = G/A_2$ .
- Pour tout  $g \in G$  on relie par une arête les images respectives de  $g$  dans  $V_1$  et  $V_2$ .



L'action à gauche de  $G$  sur  $V_1$  et  $V_2$  induit une action à gauche de  $G$  sur  $T$  qui préserve la structure de graphe. En particulier c'est une action par isométries. On notera que  $A_i$  fixe le sommet  $x_i$  qui correspond à la classe 1 dans  $V_i$ .

**R** Si on souhaite formaliser la définition de  $T$  on posera

$$V = G/A_1 \sqcup G/A_2 \quad \text{et} \quad E = G \times \{\pm 1\}.$$

L'involution  $e \rightarrow \bar{e}$  sur l'ensemble des arrêtes est donnée par  $(g, \varepsilon) \rightarrow (g, -\varepsilon)$ . Les applications d'origine  $o: E \rightarrow V$  et terminaisons  $t: E \rightarrow V$  sont les suivantes

$$o(g, \varepsilon) = \begin{cases} \text{la classe de } g \text{ dans } V_1 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \text{la classe de } g \text{ dans } V_2 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad t(g, \varepsilon) = \begin{cases} \text{la classe de } g \text{ dans } V_2 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \text{la classe de } g \text{ dans } V_1 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

Ce formalisme permet d'écrire une preuve rigoureuse du résultat ci-dessous... mais rien de vaut toutefois un bon dessin pour s'en convaincre.

**Proposition 2.1.3** Le graphe  $T$  est un arbre simplicial.

*Démonstration.* On note  $x_1$  et  $x_2$  les sommets du graphe correspondant à la classe de 1 dans  $V_1 = G/A_1$  et  $V_2 = G/A_2$  respectivement. Ces sommets sont reliés par l'arrête  $e = (1, +1)$  (autrement dit cette arrête est orientée de  $x_1$  vers  $x_2$ ). On commence par montrer que  $T$  est connexe. Le groupe  $G$  permute les composantes connexes de  $T$ . On appelle  $T_0$  la composante connexe de  $T$  contenant  $e$ . Si  $a$  est un élément de  $A_1$ , il fixe  $x_1$ . En particulier il envoie  $e$  sur une arrête issue de  $x_1$ . Par conséquent  $ae$  est dans la même composante connexe que  $e$ , donc  $aT_0 = T_0$ . Il en découle que  $A_1$  preserve  $T_0$ . De la même manière  $A_2$  preserve  $T_0$ . Or  $A_1$  et  $A_2$  engendrent  $G$ . Donc  $G$  préserve  $T_0$ . Or toute arrête de  $T$  est dans l'orbite sous  $G$  de  $e$  (ou  $\bar{e}$ ). Donc  $T \subset T_0$ . L'autre inclusion étant évidente,  $T$  n'a qu'une seule composante connexe.

On va maintenant montrer que  $T$  est sans circuit. C'est une conséquence de l'unicité de la forme normale. Supposons au contraire que  $T$  contient un circuit  $e_1 e_2 \dots e_m$ . Quitte à translater ce circuit et renverser son orientation, on peut supposer que  $e_1 = e$ . Notons que  $m$  est nécessairement paire. En effet le sommet initial de  $e_1$  est  $x_1$ , celui de  $e_2$  est  $x_2$ . Par conséquent le sommet initial de  $e_3$  est dans  $V_1$  tandis que le sommet initial de  $e_4$  est dans  $V_2$  et ainsi de suite. Pour que le circuit boucle, le nombre d'arrête est nécessairement paire. De la même manière on observe qu'il existe (un unique)  $g_k \in G$  tel que  $e_k$  s'écrit  $e_k = g_k e$  si  $k$  est impaire et  $e_k = g_k \bar{e}$  si  $k$  est paire (on notera que  $g_1$  est trivial). Notons  $y_k$  le sommet terminal de  $e_k$ , qui est aussi le sommet initial de  $e_{k+1}$ . C'est un sommet dans  $V_{i_k}$  où  $i_k$  vaut 1 si  $k$  est pair et 2 sinon. Par définition du de la relation d'adjacence dans  $T$ ,  $g_k$  et  $g_{k+1}$  ont la même image dans  $A_{i_k}$ . Autrement dit il existe  $a_k \in A_{i_k}$  tel que  $g_{k+1} = g_k a_k$ . Puisque  $e_{k+1} \neq \bar{e}_k$ , l'élément  $a_k$  est nécessairement non trivial. Par conséquent  $g_k = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ . Dire que  $e_1 e_2 \dots e_m$  est un circuit peut s'écrire

$$g_{m+1} e = e_{m+1} = e_1 = e$$

Il en résulte que  $a_1 \dots a_m = 1$ . On rappelle que deux lettres consécutives de ce mot ne sont pas dans le même facteur libre. Ceci contredit l'unicité de la forme normale (Proposition 1.3.3). Ainsi  $T$  ne contient pas de circuit et donc est un arbre. ■

Le produit libre de deux groupes n'est que la partie émergée de la *théorie de Bass-Serre* qui décrit en terme de produit amalgamés et extensions HNN comment un groupe  $G$  peut agir un arbre simplicial. Le lecteur curieux pourra consulter le livre de Serre [Serre:1977wy].

## 2.2 Isométries d'un arbre

A partir de maintenant on fixe un arbre réel  $T$ . Si  $g$  est une isométrie de  $T$  on « mesure » son action grâce à la *longueur de translation* définie comme suit

$$\|g\| = \inf_{x \in T} d(gx, x).$$

Par ailleurs on associe à  $g$  un *ensemble caractéristique*  $C_g$  qui est l'ensemble des points ayant un déplacement minimal. Autrement dit

$$C_g = \{x \in X : d(gx, x) = \|g\|\}.$$

A priori  $C_g$  peut être vide (si l'infimum n'est pas atteint). L'énoncé ci-dessous nous dit que ce n'est jamais le cas.

**Proposition 2.2.1** Soit  $g$  une isométrie d'un arbre réel  $X$ . L'ensemble caractéristique  $C_g$  est un sous-arbre fermé non vide de  $X$  invariant par  $g$ . En outre, l'une des deux affirmations suivantes est vraie.

- (i) Soit  $\|g\| = 0$  et  $C_g$  est l'ensemble des points fixes de  $g$
- (ii) Soit  $\|g\| > 0$  et  $C_g$  est une géodésique bi-infinie de  $X$  sur laquelle  $g$  agit par translation de longueur  $\|g\|$ .

**Vocabulary 2.1** Dans le contexte des arbres, on dit que  $g$  est *elliptique* si  $\|g\| = 0$  et *loxodromique* sinon. Dans la littérature, on trouve parfois le terme *hyperbolique* comme synonyme de loxodromique.

On introduit une notation bien commode pour la preuve.

**Notation 2.1.** Étant donnés trois points  $x, y, z$  de  $X$ , le produit de Gromov de  $y$  et  $z$  basé en  $x$  est défini comme

$$\langle y, z \rangle_x = \frac{1}{2} [d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)].$$

Ce produit de Gromov mesure le défaut de l'inégalité triangulaire. Dans un arbre, il s'interprète géométriquement comme la distance du point  $x$  à la géodésique  $[y, z]$ . On observe que

$$0 \leq \langle y, z \rangle_x \leq \min\{d(x, y), d(x, z)\}.$$

On verra plus tard que le produit de Gromov joue un rôle crucial dans la définition des espaces hyperboliques.

*Démonstration.* Le sous-ensemble  $C_g$  est clairement fermé et invariant sous l'action de  $g$ .

On se donne maintenant un point  $x \in X$  quelconque. On distingue deux cas. Supposons dans un premier temps que

$$\langle g^{-1}x, gx \rangle_x \geq \frac{1}{2}d(gx, x).$$

On observe alors que le milieu  $m$  de  $[x, gx]$  est fixé par  $g$ . (Faire un dessin !) Par conséquence  $\|g\| = 0$  et  $C_g$  est non vide. Dans ce cas  $C_g$  est l'ensemble des points fixes de  $g$ . En particulier  $C_g$  est un sous-arbre. En effet, supposons que  $y$  et  $y'$  sont deux points fixes par  $g$ . Puisque la géodésique entre  $y$  et  $y'$  est unique,  $g[y, y']$  coïncide avec  $[y, y']$  et donc  $g$  fixe  $[y, y']$  point à point.

Supposons maintenant que

$$\langle g^{-1}x, gx \rangle_x < \frac{1}{2}d(gx, x).$$

On note alors  $p$  le point de  $[x, gx]$  tel que  $d(x, p) = \langle g^{-1}x, gx \rangle_x$ . On observe alors que  $gp$  est aussi sur la géodésique  $[x, gx]$  à distance  $\langle g^{-1}x, gx \rangle_x$  de  $gx$ . En outre,  $gp$  est le seul point commun entre les géodésiques  $[p, gp]$  et  $[gp, g^2p]$ . (Faire à nouveau un dessin !) Aussi leur concaténation est la géodésique entre  $p$  et  $g^2p$ . De proche en proche l'union des segments  $g^k[p, gp]$  pour  $k \in \mathbf{Z}$  est une géodésique bi-infinie que l'on notera  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow X$ . L'isométrie  $g$  agit sur  $\gamma$  par translation de longueur  $T = d(gp, p)$ . On va maintenant montrer que  $T = \|g\|$  et  $C_g$  coïncide avec  $\gamma$ .

Par définition,  $T \geq \|g\|$ . Soit  $y$  un point de  $X$  et  $q$  sa projection sur  $\gamma$ . Le point  $gq$  (distinct de  $q$  car  $T > 0$ ) est la projection de  $gy$  sur  $\gamma$ . On observe que la réunion  $[y, q] \cup [q, gq] \cup [gq, gy]$  est localement injectif. Autrement dit c'est une géodésique. Par conséquent

$$d(gy, y) \geq 2d(q, \gamma) + d(gq, q) \geq T \quad (2.1)$$

Cette inégalité est vraie pour tout  $y \in X$ . En prenant l'infimum, on obtient que  $T = \|g\|$ . En particulier,  $\gamma$  est contenu dans  $C_g$ . L'inégalité (2.1) nous dit en outre que si  $y$  appartient à  $C_g$  alors  $d(y, \gamma) = 0$ . Ainsi  $C_g$  et  $\gamma$  coïncident. En particulier  $C_g$  est un sous-arbre de  $X$ , ce qui termine la preuve. ■

**Exercice 2.4** Soit  $g$  une isométrie d'un arbre réel  $X$ .

- (i) Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a  $\|g^n\| = |n| \cdot \|g\|$ .
- (ii) Soit  $n \in \mathbf{Z}^*$ . Montrer que  $g$  est elliptique (respectivement loxodromique) si et seulement si  $g^n$  l'est. Si  $g$  est loxodromique, montrer que  $g$  et  $g^n$  ont le même ensemble caractéristique. ■

**Exercice 2.5** Soit  $g$  un isométrie d'un arbre réel. Montrer que pour tout  $x \in X$  on a

$$d(gx, x) = 2d(x, C_g) + \|g\|.$$

Décrire la géodésique reliant  $x$  et  $gx$ . ■

**Corollary 2.2.2** Si  $g$  est une isométrie d'ordre fini d'un arbre réel alors  $g$  est elliptique.

*Démonstration.* Il découle de la seconde partie de la proposition 2.2.1 que tout élément loxodromique est d'ordre infini. Le résultat en découle par contraposé. ■

**Corollary 2.2.3** Soit  $A_1$  et  $A_2$  deux groupes de type fini. On note  $G = A_1 * A_2$  leur produit libre. Tout élément d'ordre fini de  $G$  est conjugué à un élément de  $A_1$  ou  $A_2$ . En particulier si  $A_1$  et  $A_2$  sont sans torsion alors  $G$  aussi.

**Vocabulary 2.2** On dit qu'un groupe est *sans torsion* si tous ses éléments non-triviaux sont d'ordre infini.

*Démonstration.* Soit  $g$  un élément d'ordre fini de  $G \setminus \{1\}$ . On note  $T$  l'arbre associé à  $G$  construit dans la proposition 2.1.3. D'après le corollaire précédent  $g$  est une isométrie elliptique de  $T$ , donc fixe un point de  $T$ . Le stabilisateur dans  $G$  d'un point contenu dans l'intérieur d'une arête est toujours trivial. Donc  $g$  fixe un sommet  $x$  dans  $V_1 = G/A_1$  ou  $V_2 = G/A_2$ . Suppose que  $x$  soit un élément de  $V_1$  (l'autre cas est symétrique). Le sommets  $x$  correspond à la classe  $uA_1$  pour un certain  $u \in G$ , tandis que  $gx$  est la classe de  $guA_1$ . Dire que  $gx = x$  équivaut à  $guA_1 = uA_1$ . Il existe donc  $a \in A_1$  tel que  $gu = ua$ . Par conséquent  $g = uau^{-1}$  est conjugué à un élément de  $A_1$ . ■

**Exercice 2.6** Soient  $A$  et  $B$  deux groupes finis. Montrer que  $A * B$  est *virtuellement libre*, c'est à dire qu'il contient un sous-groupe libre d'indice fini.

*Hint : montrer que le noyau du morphisme  $A * B \rightarrow A \times B$  agit librement sur un arbre.* ■

## 2.3 Problèmes et exercices

### 2.3.1 Lemme de Serre

On propose une suite d'exercices dont l'objectif est de montrer le résultat suivant.

**Proposition 2.3.1** Soit  $X$  un arbre réel muni d'une action par isométries d'un groupe  $G$ . Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $G$ . On suppose que pour tout  $s_1, s_2 \in S$ , les éléments  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_1 s_2$  sont d'ordre fini. Alors il existe un point  $x \in X$  qui est fixé par tous les éléments de  $G$ .

Dans toute la suite  $X$  est un arbre réel.

**Exercice 2.7** Soit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  une famille finie de sous-arbre fermés de  $X$ , tels que pour tout  $i, j$  l'intersection  $Y_i \cap Y_j$  est non vide. Montrer que  $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_m$  est non vide.

*Hint : faire une récurrence sur  $m$ .* ■

**Exercice 2.8** Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux isométries elliptiques. Pour simplifier on note  $C_1$  et  $C_2$  leurs ensembles caractéristiques respectifs. Montrer que si  $C_1 \cap C_2$  est vide alors  $g_2 g_1$  est loxodromique.

*Hint : considérer la projection  $p$  sur  $C_2$  d'un point  $x \in C_1$  et montrer que  $g_2 g_1$  ne peut pas fixer le milieu de la géodésique  $[x, g_2 x]$ .* ■

**Exercice 2.9** Démontrer la proposition. ■

## 3. Espaces hyperboliques (au sens de Gromov)

### 3.1 Définition et triangles fins

Dans toute cette partie  $(X, d)$  est un espace métrique.

**Definition 3.1.1** Le produit de Gromov de trois points  $x, y, z \in X$  est la quantité définie par

$$\langle y, z \rangle_x = \frac{1}{2} [d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)].$$

Cette quantité s'interprète géométriquement de la manière suivante. Soit  $x^*, y^*, z^* \in \mathbf{R}^2$  trois points du plan tels que

$$d(x, y) = d(x^*, y^*), \quad d(y, z) = d(y^*, z^*) \quad \text{et} \quad d(z, x) = d(z^*, x^*).$$

Un tel triangle dans  $\mathbf{R}^2$  existe toujours et est unique à isométrie près. On note  $p^*$  et  $q^*$  les points de contact du cercle inscrit du triangle  $[x^*, y^*, z^*]$  avec les côtés  $[x^*, y^*]$  et  $[x^*, z^*]$  respectivement. On a alors

$$\langle y, z \rangle_x = d(x^*, p^*) = d(x^*, q^*).$$

**Todo.** Faire une figure ! Le produit de Gromov mesure le défaut dans l'inégalité triangulaire. On remarque directement que

$$0 \leq \langle y, z \rangle_x \leq \min\{d(x, y), d(x, z)\}.$$

**Definition 3.1.2** Soit  $\delta \geq 0$ . L'espace  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique si pour tout  $x, y, z, t \in X$ , on a

$$\langle x, z \rangle_t \geq \min\{\langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t\} - \delta. \quad (3.1)$$

On dit que  $(X, d)$  est hyperbolique (au sens de Gromov) s'il existe  $\delta \geq 0$  tel que  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique.

#### ■ Exemple 3.1

- (i) Tout espace borné est un espace hyperbolique. On rappelle qu'un tel espace est quasi-isométrique à un point. Ce n'est donc pas le type d'exemples qui va beaucoup nous intéresser.
- (ii) Les arbres réels sont 0-hyperboliques. (Faire un dessin)

■

**Exercice 3.1** Montrer que l'espace  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique si et seulement si pour tout  $x, y, z, t \in X$ , on a

$$d(x, z) + d(y, t) \leq \max \{d(x, y) + d(z, t), d(x, t) + d(y, z)\} + 2\delta. \quad (3.2)$$

*Hint : retrancher aux deux membres de l'inégalité (3.1) la quantité  $d(x, t) + d(y, t) + d(z, t)$ .* ■

### 3.1.1 Les triangles fins

L'inégalité à quatre points (3.1) est très commode quand il s'agit de rédiger des preuves, mais assez peu intuitive. Il existe de nombreuses définitions équivalentes de l'hyperbolicité, qui nous aident à appréhender les espaces hyperboliques. L'une d'elle se formule en termes de triangles « fins ».

A partir de maintenant on suppose que  $X$  est géodésique. On rappelle que deux points ne sont pas toujours reliés par une unique géodésique. Pourtant on s'autorisera un abus de notation et on écrira  $[x, y]$  pour désigner une géodésique entre deux points  $x, y \in X$ . Soit  $Y$  une partie de  $X$  et  $\alpha \geq 0$ . Le  $\alpha$ -voisinage de  $Y$ , noté  $Y^{+\alpha}$ , est l'ensemble des points  $x \in X$  tels que  $d(x, Y) \leq \alpha$ .

**Definition 3.1.3** Un triangle géodésique de  $X$  est dit  $\delta$ -fin si chaque coté est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de la réunion des deux autres.

**Proposition 3.1.1** Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique.

- (i) Si  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique, alors tous les triangles géodésiques de  $X$  sont  $4\delta$ -fins.
- (ii) Si tous les triangles géodésiques de  $X$  sont  $\delta$ -fins alors  $X$  est  $3\delta$ -hyperbolique.

#### Remarques.

- En pratique, la valeur précise de  $\delta$  importe assez peu (on est pas à un ou deux  $\delta$  près). L'important est d'avoir une constante uniforme pour tous les triangles. De ce point de vue la proposition précédente dit essentiellement qu'un espace est hyperbolique si et seulement si ses triangles géodésiques sont uniformément fins.
- Il faut penser à la constante  $\delta$  comme une échelle d'observation critique. Si  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique, on pourra en déduire de propriétés sur les triangles (ou d'autres figures) dont la « taille » est très grande devant  $\delta$ . Par contre la condition d'hyperbolicité ne dit rien sur les triangles dont les cotés sont plus petits que  $\delta$  par exemple.

*Démonstration.* On suppose dans un premier temps que  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique. Soient  $x, y, z \in X$ . On fixe  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[z, x]$  trois géodésiques reliant ces points. Soient  $p \in [x, y]$  et  $q \in [x, z]$ . On va montrer que

$$d(p, q) \leq \max \{ |d(x, p) - d(x, q)|, d(x, p) + d(x, q) - 2\langle y, z \rangle_x \} + 4\delta. \quad (3.3)$$

Cette inégalité est en effet suffisante pour conclure (faire un dessin). Par définition on a

$$d(p, q) = d(x, p) + d(x, q) - 2\langle p, q \rangle_x. \quad (3.4)$$

En appliquant deux fois l'inégalité à quatre points (3.1) on voit que

$$\langle p, q \rangle_x \geq \min \{ \langle p, y \rangle_x, \langle y, z \rangle_x, \langle z, q \rangle_x \} - 2\delta.$$

Si le minimum est atteint par  $\langle y, z \rangle_x$ , alors notre affirmation découle directement de (3.4). Supposons que le minimum soit atteint par  $\langle p, y \rangle_x$ . Puisque de  $p$  est sur la géodésique  $[x, y]$ , on a  $\langle p, y \rangle_x = d(x, p)$ . Ainsi (3.4) devient

$$d(p, q) \leq d(x, q) - d(x, p) + 4\delta$$

Notre affirmation est donc vraie. Si le minimum est atteint par  $\langle z, q \rangle_x$ , la preuve est identique. On a donc terminé la preuve de notre affirmation. Ainsi tous les triangles géodésiques de  $X$  sont  $4\delta$ -fins.

On suppose maintenant que tous les triangles géodésiques de  $X$  sont  $\delta$ -fins. On va commencer par une autre interprétation géométrique du produit de Gromov. Soient  $x, y, z \in X$ . On fixe une géodésique  $[y, z]$  entre  $y$  et  $z$ . Alors

$$\langle y, z \rangle_x \leq d(x, [y, z]) \leq \langle y, z \rangle_x + 2\delta. \quad (3.5)$$

Autrement dit, « à une erreur  $\delta$  près », le produit de Gromov  $\langle y, z \rangle_x$  mesure la distance de  $x$  au côté  $[y, z]$ . Pour tout point  $p$  sur  $[y, z]$ , l'inégalité triangulaire nous dit que

$$\langle y, z \rangle_x \leq \frac{1}{2} \left[ \left( d(x, p) + d(p, z) \right) + \left( d(x, p) + d(p, z) \right) - \left( d(y, p) + d(p, z) \right) \right] \leq d(x, p)$$

Aussi  $\langle y, z \rangle_x \leq d(x, [y, z])$ . On va maintenant montrer l'autre inégalité. Pour cela on fixe deux autres géodésiques  $[x, y]$  et  $[x, z]$ . Puisque les triangles de  $X$  sont  $\delta$ -étroits, le côté  $[y, z]$  est dans le  $\delta$ -voisinage de  $[x, y] \cup [x, z]$ . Aussi, il existe un point  $p$  sur  $[y, z]$  qui est à distance au plus  $\delta$  de  $[x, y]$  et  $[x, z]$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq d(x, p) + d(p, y) - 2\delta, \\ d(x, z) &\geq d(x, p) + d(p, z) - 2\delta \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\langle y, z \rangle_x \geq \frac{1}{2} \left[ \left( d(x, p) + d(p, z) \right) + \left( d(x, p) + d(p, z) \right) - \left( d(y, p) + d(p, z) \right) \right] - 2\delta \geq d(x, p) - 2\delta.$$

On en déduit directement l'autre inégalité de (3.5). Montrons maintenant que  $X$  est  $3\delta$ -hyperbolique. Soient  $x, y, z, t \in X$ . On fixe des géodésiques  $[x, y]$ ,  $[y, z]$ , et  $[z, x]$ . Puisque le triangles  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  est  $\delta$ -fin, on a

$$d(t, [x, z]) \geq \min \left\{ d(t, [x, y]), d(t, [y, z]) \right\} - \delta$$

On conclut en combinant cette inégalité avec (3.5). ■

### Remarques.

- Les preuves qu'on peut trouver dans la littérature peuvent paraître plus longues. C'est surtout qu'elles démontrent au passage d'autres définitions équivalentes d'hyperbolicité.
- Comme on l'a rappelé, deux points  $x, y \in X$  peuvent être reliés par *plusieurs* géodésiques. Toutefois deux telles géodésiques forment un triangle dégénéré (dont un des côtés est réduit à un point). Il en résulte que chacune de ces géodésiques est à distance au plus  $4\delta$  de l'autre. Autrement dit à une échelle très grande devant  $\delta$ , on peut faire « comme si » il n'y avait qu'une seule géodésique entre ces points.

## 3.2 L'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$

L'espace hyperbolique  $\mathbf{H}^n$  est l'exemple par excellence d'un espace hyperbolique au sens de Gromov. Cette géométrie a émergé au XIX<sup>ème</sup> siècle grâce aux travaux de Gauß, Bolyai et Lobatchevski. Il existe de nombreux « modèles » de l'espace hyperbolique.

### 3.2.1 Le plan hyperbolique.

De la même manière qu'il existe des espaces euclidiens de toutes dimension (la droite, le plan, etc), pour chaque entier  $n$ , on définit un espace hyperbolique de dimension  $n$ . En pratique on travaillera essentiellement avec le *plan hyperbolique*  $\mathbf{H}^2$  (de dimension 2).

#### Le demi-plan de Poincaré.

Un premier modèle du plan hyperbolique  $\mathbf{H}^2$  est le *demi-plan de Poincaré* (*upper half plane* dans la littérature anglophone). En tant qu'ensemble cet espace est

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\} = \{z \in \mathbf{C} : \text{im} z > 0\}$$

Cet ensemble est muni d'une métrique Riemannienne

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Cela signifie que la longueur d'une courbe  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  donnée en coordonnées par  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  est

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

La distance entre deux points dans  $\mathcal{U}$  est alors la longueur de la plus petite courbe reliant ces deux points.

**Exercice 3.2** Montrer que le chemin  $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{U}$  défini par  $c(t) = (0, e^t)$  est une géodésique bi-infinie. ■

Pour aiguiser son intuition sur le demi-plan de Poincaré, on pourra utiliser l'applet disponible sur la page web de Sylvain Arnt (en bas de page)

<http://arnt-sylvain-maths.com/>

#### Le disque de Poincaré.

En tant qu'ensemble le disque de Poincaré (*disc model* dans la littérature anglophone) est... le disque unité

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$$

Celui-ci est muni de la métrique Riemannienne

$$ds^2 = 2 \frac{dx^2 + dy^2}{1 - (x^2 + y^2)}$$

**Exercice 3.3** On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \\ z &\rightarrow \frac{i-z}{i+z} \end{aligned}$$

- (i) Montrer que  $\varphi$  induit une bijection de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{D}$ .
- (ii) Montrer que l'image par  $\varphi$  de la géodésique donnée à l'exercice 3.2 est le diamètre de  $\mathcal{D}$  reliant les points 1 à  $-1$  (vus dans  $\mathbf{C}$ ).
- (iii) Quelle est l'image par  $\varphi^{-1}$  des autres diamètres de  $\mathcal{D}$ ?
- (iv) Pour ceux qui sont familiers avec la géométrie Riemannienne, montrer que cette application est une isométrie (on montrera que l'application linéaire tangente est une isométrie).



On remarquera que le cercle unité ne fait pas partie de  $\mathcal{D}$ . Comme le suggère la question (ii) de l'exercice précédent, il faut penser que lorsqu'on s'approche du cercle unité dans le modèle du disque de Poincaré, en fait on est en train de partir à l'infini.

### Le demi-hyperboloïde.

Considérons la forme quadratique  $q$  de  $\mathbf{R}^3$  définie par  $q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ . L'ensemble des points  $x = (x_0, x_1, x_2)$  tels que  $q(x) = -1$  est un hyperboloïde à deux nappes. Le modèle du demi-hyperboloïde est l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbf{R}^3 : q(x) = -1 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

La forme bilinéaire symétrique associée  $q$  est  $\beta(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ . La distance entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{H}$  est caractérisée par la relation

$$\text{ch}(d(x, y)) = -\beta(x, y)$$

### Mais finalement qui est $\mathbf{H}^2$ ?

On peut montrer (comme dans l'exercice 3.3) que ces trois modèles  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{H}$  sont isométriques. Il représentent donc le même espace qu'on appelle *plan hyperbolique* et qu'on note  $\mathbf{H}^2$ . Suivant les propriétés qu'on souhaite utiliser on utilisera le modèle le plus adapté.

Les triangles de  $\mathbf{H}^2$  vérifient une variation sur le théorème d'Al-Kashi (*law of cosine* en anglais) : étant donné un triangle dont les longueurs des côtés sont  $a$ ,  $b$ , et  $c$ ; on note  $\alpha$ , l'angle du sommet opposé au côté de longueur  $a$ ; alors

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ch } c - \text{sh } b \text{sh } c \cos \alpha.$$

Comme on peut s'y attendre vu la terminologie on a le résultat suivant

**Theorem 3.2.1** Let plan hyperbolique  $\mathbf{H}^2$  est un espace hyperbolique au sens de Gromov.

### 3.2.2 Isométries.

Pour étudier les isométries de  $\mathbf{H}^2$  on se place dans le demi-plan supérieur de Poincaré  $\mathcal{U}$ . Supposons que  $\gamma$  est une matrice de  $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$  donnée par

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \\ z &\rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

définit une action de groupe de  $\text{SL}(2, \mathbf{R})$  sur  $\mathcal{U}$  (exercice!). On notera également que les matrices  $\gamma$  et  $-\gamma$  agissent de la même manière sur  $\mathcal{U}$ . Ainsi l'action décrite ci-dessus induit une action de  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Theorem 3.2.2** Le groupe des isométries de  $\mathbf{H}^2$  est  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ .

**Exercice 3.4** Pour ceux qui sont familiers avec la géométrie Riemannienne, montrer que l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  définie ci-dessus est une action par isométries. ■

**Exercice 3.5** En utilisant l'application  $\varphi$  de l'exercice 3.3, expliciter l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  sur le disque de Poincaré. ■

L'action par isométries de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$  permet de décrire plus facilement les géodésiques de  $\mathcal{U}$ .

**Exercice 3.6** On note  $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{U}$  la géodésique donnée par  $c(t) = (0, e^t)$  (voir exercice 3.2). Soit  $\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ . Montrer qu'en tant que sous-ensemble de  $\mathbf{C}$ , le chemin  $\gamma c$  est soit une droite verticale, soit un demi-cercle orthogonal à la droite réelle. Donner son centre et son rayon ■

En fait toutes les géodésiques de  $\mathcal{H}$  sont obtenues de la sorte.

**Exercice 3.7** Soit  $\gamma$  un élément non trivial de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ . Montrer que  $\gamma$  est conjugués dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$  à l'une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in (0, \pi),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda > 1.$$

On distinguera trois cas selon que  $|\mathrm{tr}(\gamma)| < 2$ ,  $|\mathrm{tr}(\gamma)| = 2$  ou  $|\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$ .

Etudier le comportement de chaque de ces isométries sur  $\mathcal{U}$ . ■

Notons que  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  préserve non seulement  $\mathcal{U}$ , mais aussi l'ensemble  $\partial\mathbf{H}^2$  défini comme la droite réelle  $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$  à laquelle on rajoute un point  $\infty$  à l'infini – moralement le point de coordonné  $(0, \infty)$ .

**Exercice 3.8** Montrer que l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$  sur  $\partial\mathbf{H}^2$  est 3-transitive, c'est à dire que  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$  agit transitivement sur l'ensemble des triples  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  de points deux à deux distincts de  $\partial\mathbf{H}^2$ .

*Hint : on pourra montrer que pour n'importe quel triplet  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  de points deux à deux distincts de  $\partial\mathbf{H}^2$ , il existe un élément  $\gamma$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  qui l'envoie sur  $(0, 1, \infty)$ .* ■

### 3.2.3 L'espace hyperbolique en dimension supérieur.

Les constructions précédentes se généralisent en dimension supérieures. Tout comme le plan, il existe de nombreux modèles de l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}^n$  de dimension  $n$  qui sont deux à deux isométriques.

#### Le demi-espace de Poincaré.

En tant qu'ensemble cet espace est

$$\mathcal{U}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$$

Cet ensemble est muni d'une métrique Riemannienne

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}$$

**La boule conforme.**

En tant qu'ensemble cet espace est la boule unité

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

Cet ensemble est muni d'une métrique Riemannienne

$$ds^2 = 2 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

**Le demi-hyperboloïde.**

Considérons la forme quadratique  $q$  de  $\mathbf{R}^n$  définie par  $q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ . En tant qu'ensemble le demi-hyperboloïde est

$$\mathcal{H}_n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : q(x) = -1 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

La forme bilinéaire symétrique associée  $q$  est  $\beta(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ . La distance entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{H}_n$  est caractérisée par la relation

$$\text{ch}(d(x, y)) = -\beta(x, y)$$

**3.3 D'autres exemples/non-exemples d'espaces hyperboliques.**

- Plus généralement. Si  $X$  est une variété Riemannienne, simplement connexe dont la courbure sectionnelle  $K$  est négativement majorée (c'est à dire qu'il existe  $\kappa < 0$  tel que  $K \leq \kappa$ ) alors  $X$  est hyperbolique au sens de Gromov. On peut en effet montrer que les triangles de  $X$  sont « fins » que ceux de l'espace hyperbolique renormalisé  $a\mathbf{H}^2$  où  $a = 1/\sqrt{-\kappa}$ . En particulier si  $M$  est une variété Riemannienne dont la courbure sectionnelle est négativement majorée, alors son revêtement universel est hyperbolique au sens de Gromov.
- En revanche le plan euclidien  $\mathbf{R}^2$  n'est pas hyperbolique. On y trouve facilement des triangles qui ne sont pas fins (faire un dessin). Plus généralement l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  est hyperbolique si et seulement si  $n \in \{0, 1\}$ .

**Exercice 3.9** On a déjà observé qu'un arbre réel est un espace 0-hyperbolique. Le but de cet exercice est de montrer la réciproque : si  $X$  est un espace géodésique 0-hyperbolique, alors  $X$  est un arbre réel. On fixe donc un espace géodésique 0-hyperbolique  $X$ .

- (i) Soient  $x, y \in X$ . On fixe un arc  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  de  $x$  vers  $y$  et une géodésique  $[x, y]$  entre les mêmes points. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la géodésique  $[x, y]$  est contenu dans le  $\varepsilon$ -voisinage de  $\gamma$ . On pourra considérer une subdivision  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1$  de  $[0, 1]$  tel que pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  le diamètre de  $\gamma$  restreint à  $[t_i, t_{i+1}]$  est au plus  $\varepsilon$  et montrer que  $[x, y]$  est contenu dans  $[\gamma(t_0), \gamma(t_1)] \cup [\gamma(t_1), \gamma(t_2)] \cup \dots \cup [\gamma(t_{m-1}), \gamma(t_m)]$ .
- (ii) En déduire que  $[x, y]$  est contenu dans  $\gamma$ .
- (iii) Conclure. ■

**3.4 Invariance par quasi-isométries**

On aimerait maintenant définir un groupe hyperbolique, comme un groupe de type fini dont le graphe de Cayley est un espace hyperbolique. Toutefois cette définition se heurte à une difficulté. Le graphe de Cayley dépend du système de générateur qu'on se donne. Lequel choisir ? Il se trouve que le choix du système de générateur importe peu. En effet, être hyperbolique est une propriété invariante par quasi-isométries. Plus précisément on va montrer le résultat suivant.

**Theorem 3.4.1** Soit  $f: X \rightarrow Y$  un plongement quasi-isométrique entre deux espaces géodésiques. Si  $Y$  est hyperbolique, alors  $X$  aussi.

Les deux exemples/exercices suivants sont des cas très simples du théorème ci-dessus.

- (i) Soit  $f: X \rightarrow Y$  un plongement  $(1, \varepsilon)$ -quasi-isométrique. Si  $Y$  est  $\delta$ -hyperbolique, alors  $X$  est  $\delta'$ -hyperbolique avec  $\delta' = \delta + 3\varepsilon$ .
- (ii) Soit  $X$  un espace métrique. Soit  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ . On note  $\lambda X$  l'espace métrique  $X$  dont on a renormalisé la distance par  $\lambda$ , c'est à dire que pour tout  $x, x' \in X$

$$d_{\lambda X}(x, x') = \lambda d_X(x, x').$$

Si  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique alors  $\lambda X$  est  $\lambda \delta$ -hyperbolique.

En général, la difficulté vient du fait que le coefficient de dilatation d'une quasi-isométrie n'est pas 1, ni même fixe (comme dans le cas d'une renormalisation) mais varie entre deux bornes ( $A$  et  $1/A$ ).

La preuve du théorème 3.4.1 repose sur une propriété fondamentale des espaces hyperboliques : la stabilité des quasi-géodésiques (*Morse Lemma* dans la littérature anglophone).

**Definition 3.4.1** Soit  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ . Une  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique  $\gamma: I \rightarrow X$  est un plongement  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique d'un interval  $I$  de  $\mathbf{R}$  dans  $X$ , c'est à dire que pour tout  $s, t \in I$  on a

$$\kappa^{-1} |s - t| - \ell \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \kappa |s - t| + \ell.$$

Si  $I = [a, b]$  est un interval fermé borné, les points  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$  sont les *extrémités* de  $\gamma$ . Une géodésique est une  $(1, 0)$ -quasi-isométrie.

**Theorem 3.4.2 — Stabilité des quasi-géodésiques.** Soient  $\delta \geq 0$ ,  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ . Il existe  $D \geq 0$  avec la propriété suivante. Soit  $X$  un espace géodésique  $\delta$ -hyperbolique. Si  $\gamma$  et  $\nu$  sont deux  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésiques ayant les mêmes extrémités, alors  $\gamma$  est dans le  $D$ -voisinage de  $\nu$  et vice versa.

### Remarques.

- La *distance de Hausdorff* entre deux parties  $Y_1$  et  $Y_2$  est définie comme

$$d_H(Y_1, Y_2) = \inf \{ C \in \mathbf{R}_+ : Y_1 \subset Y_2^{+C} \text{ et } Y_2 \subset Y_1^{+C} \}.$$

C'est une distance sur les parties fermées non-vides de  $X$  (cette distance peut toutefois prendre des valeurs infinies). L'énoncé nous dit donc que  $d_H(\gamma, \nu) \leq D$ .

- Le résultat s'applique en particulier si  $\nu$  est une géodésique. Autrement dit, dans un espace hyperbolique, une quasi-géodésique ne s'éloigne jamais trop de la géodésique entre ses extrémités. C'est une propriété caractéristique des espaces à courbure négative (et totalement fautive dans  $\mathbf{R}^2$  par exemple).
- On remarquera que le paramètre  $D$  ne dépend que de  $\delta$ ,  $\kappa$  et  $\ell$ . Il ne dépend ni de  $\gamma$  et  $\nu$  (heureusement sinon l'énoncé serait vide) et (surtout) ni de  $X$ .

On admet pour le moment le théorème 3.4.2 afin de démontrer le théorème 3.4.1.

*Démonstration du Théorème 3.4.1.* On se donne un plongement  $(\kappa, \ell)$ -quasi-isométrique  $f: X \rightarrow Y$  entre deux espaces métriques  $X$  et  $Y$ . On suppose que  $Y$  est  $\delta$ -hyperbolique. On va montrer que les triangles géodésiques de  $X$  sont uniformément fins. Pour cela on considère trois points  $x, y, z \in X$  et fixe des géodésiques  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[z, x]$ . On remarque que  $f([x, y])$  est une  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique. Aussi la distance de Hausdorff entre  $f([x, y])$  et  $[f(x), f(y)]$  est au plus  $D$  où  $D = D(\delta, \kappa, \ell)$  est le paramètre fourni par le théorème 3.4.2. De même avec les géodésiques  $[y, z]$

et  $[z, x]$ . Puisque  $Y$  est  $\delta$ -hyperboliques, ses triangles géodésiques sont  $4\delta$ -fins (Proposition 3.1.1). Donc  $[f(x), f(z)]$  est contenu dans le  $4\delta$ -voisinage de  $[f(x), f(y)] \cup [f(y), f(z)]$ . Par conséquent  $f([x, z])$  est contenu dans le  $(4\delta + 2D)$ -voisinage de  $f([x, y]) \cup f([y, z])$  (faire un dessin). Autrement dit si  $p$  est un point de  $[x, z]$ , il existe  $q$  sur  $[x, y] \cup [y, z]$  tel que  $d(f(p), f(q)) \leq 4\delta + 2D$ . Puisque  $f$  est un plongement  $(\kappa, \ell)$ -quasi-isométrique, l'inégalité précédent nous donne

$$d(p, q) \leq \kappa d(f(p), f(q)) + \kappa \ell \leq \kappa(4\delta + 2D + \ell).$$

Ainsi les triangles géodésiques de  $X$  sont  $\delta'$ -fins avec  $\delta' = \kappa(4\delta + 2D + \ell)$ . Donc  $X$  est hyperbolique (Proposition 3.1.1). ■

### 3.5 Ultra-limite d'espace métrique

On peut penser à un espace  $\delta$ -hyperbolique comme une «  $\delta$ -déformation » d'un arbre. En effet si on regarde des triangles géodésiques de très très loins, il ressemble de plus en plus aux triangles d'un arbre. Pour formaliser et exploiter cette idée, on va définir une notion de limite d'espaces métriques.

Un *ultra-filtre non principal* est une application  $\omega : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \rightarrow \{0, 1\}$  qui est finiment additive, c'est à dire que

$$\omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B) - \omega(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$$

qui s'annule sur toute partie finie et telle que  $\omega(\mathbf{N}) = 1$ . L'existence d'une telle application découle du Lemme de Zorn, voir par exemple Bourbaki [Bou71] (on admettra donc l'axiome du choix !). Il faut penser à un ultra-filtre comme une machine à « faire des choix cohérents ». En particulier elle va nous permettre d'extraire des sous-suites convergentes sans avoir à se poser de questions.

Une propriété  $P_n$  est vraie  $\omega$ -presque partout ( $\omega$ -pp) si

$$\omega(\{n \in \mathbf{N} : P_n \text{ est vraie}\}) = 1.$$

Observons que si  $A$  est une partie de  $\mathbf{N}$  alors  $\omega(\mathbf{N} \setminus A) = 1 - \omega(A)$ . Par conséquent si une propriété n'est pas vraie  $\omega$ -pp, alors elle est fausse  $\omega$ -pp. Par exemple si  $(u_n)$  est une suite réelle alors  $u_n \geq 0$   $\omega$ -pp ou  $u_n < 0$   $\omega$ -pp. Cet exemple illustre la puissance de  $\omega$  pour faire des choix. Les choix d'un ultra-filtre sont cohérent : si  $P_n$  et  $P'_n$  sont deux propriétés vraies  $\omega$ -pp, alors leur conjonction  $P_n \wedge P'_n$  est vraie  $\omega$ -pp. Cela résulte du fait que si  $\omega(A) = 1$  et  $\omega(B) = 1$  alors  $\omega(A \cap B) = 1$ .

Soient  $(u_n)$  une suite réelle et  $\ell \in \mathbf{R}_+$ . On dit que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  selon  $\omega$  et on écrit  $\lim_{\omega} u_n = \ell$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on  $|u_n - \ell| < \varepsilon$   $\omega$ -pp. Si  $(u_n)$  converge (au sens usuel) alors elle converge selon  $\omega$ . Les opérations standards sur les limites (somme, produit, etc) fonctionnent comme dans le cas usuel. Notre intérêt pour les ultra-filtre réside dans l'énoncé suivant.

**Proposition 3.5.1** Soit  $\omega$  un ultra-filtre non-principal. Toute suite réelle bornée admet une limite selon  $\omega$ .

*Démonstration.* La preuve est une adaptation directe de la preuve du théorème de Bolzano–Weierstraß. ■

À partir de maintenant on ne verra plus les ultra-filtres que comme un outil pour faire converger des suites bornées. C'est à peu près la seule propriété qui nous intéressera.

On se donne maintenant une suite d'espaces métriques pointés  $(X_n, x_n^0)$  et un ultra-filtre non-principal  $\omega$ . Le produit restreint de cette suite est

$$\prod_{\omega} X_n = \left\{ (y_n) \in \prod_{n \in \mathbf{N}} X_n : d(y_n, x_n^0) \text{ est uniformément borné} \right\}.$$

Si  $(y_n)$  et  $(z_n)$  sont deux suites de ce produit restreint, l'inégalité triangulaire nous dit que la suite  $d(y_n, z_n)$  est bornée. Par conséquent la limite  $\lim_{\omega} d(y_n, z_n)$  est bien définie. On définit alors une relation binaire entre les éléments du produit restreint :  $(y_n) \sim (z_n)$  si  $\lim_{\omega} d(y_n, z_n) = 0$ . On vérifie que cette relation est une relation d'équivalence (exercice).

**Definition 3.5.1** La limite de la suite  $(X_n, x_n^0)$  selon  $\omega$  est le quotient

$$\lim_{\omega} (X_n, x_n^0) = \prod_{\omega} X_n / \sim .$$

On le notera simplement  $\lim_{\omega} X_n$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

**Notation 3.1.** Si  $(y_n)$  est une suite du produit restreint, on notera  $\lim_{\omega} y_n$  sa classe dans  $\lim_{\omega} X_n$ .

**Métrique.** Pour le moment  $\lim_{\omega} X_n$  est juste un ensemble de point. On muni maintenant cet ensemble d'une distance. Si  $y = \lim_{\omega} y_n$  et  $z = \lim_{\omega} z_n$  on pose

$$d(y, z) = \lim_{\omega} d(y_n, z_n)$$

### Exercice 3.10

- (i) Vérifier que cette limite est bien définie et ne dépend pas du choix des suites  $(y_n)$  et  $(z_n)$ .
- (ii) Vérifier que l'application  $d: \lim_{\omega} X_n \times \lim_{\omega} X_n \rightarrow \mathbf{R}_+$  ainsi obtenue est bien une distance. ■

### ■ Exemple 3.2

- (i) Si  $X_n$  est la suite constante égale à  $\mathbf{R}^2$  pointé en l'origine alors  $\lim_{\omega} X_n$  est isométrique à  $\mathbf{R}^2$ .
- (ii) Si  $X_n$  est la suite constante égale à  $\mathbf{Q}$  pointé en 0, alors  $\lim_{\omega} X_n = \mathbf{R}$ .
- (iii) Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite réelle qui converge vers 0. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on note  $X_n$  le graphe de Cayley de  $\mathbf{Z}^2$  renormalisé par  $\varepsilon_n$ , c'est à dire que les arêtes du graphe vue dans  $X_n$  sont de longueur  $\varepsilon_n$ . On pointe ces espace métriques en l'identité. Alors  $\lim_{\omega} X_n$  est isométrique à  $\mathbf{R}^2$  muni de la distance  $L^1$  ■

**Proposition 3.5.2** Soient  $(X_n, x_n^0)$  une suite pointé d'espaces métrique et  $\omega$  un ultra-filtre non principal. Si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'espace  $X_n$  est géodésique alors  $\lim_{\omega} X_n$  aussi.

*Démonstration.* Soient  $y = \lim_{\omega} y_n$  et  $z = \lim_{\omega} z_n$  deux points de  $\lim_{\omega} X_n$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on fixe  $\gamma_n: [0, a_n] \rightarrow X_n$  une géodésique de  $y_n$  vers  $z_n$ . En particulier  $a_n = d(y_n, z_n)$  est une suite bornée. On peut donc définir

$$a = \lim_{\omega} a_n = \lim_{\omega} d(y_n, z_n) = d(y, z) .$$

Soit  $s \in [0, a]$ . D'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a

$$d(x_n^0, \gamma_n(sa_n/a)) \leq d(x_n^0, y_n) + d(y_n, \gamma_n(sa_n/a)) \leq d(x_n^0, y_n) + d(y_n, z_n)$$

Autrement dit la suite  $d(x_n^0, \gamma_n(sa_n/a))$  est bornée. On peut donc définir un chemin  $\gamma: [0, a] \rightarrow \lim_{\omega} X_n$  de la manière suivante : pour tout  $s \in [0, a]$ ,

$$\gamma(s) = \lim_{\omega} \gamma_n \left( \frac{s}{a} a_n \right)$$

On vérifie alors que pour tout  $s, t \in [0, a]$ ,

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \lim_{\omega} d \left( \gamma_n \left( \frac{s}{a} a_n \right), \gamma_n \left( \frac{t}{a} a_n \right) \right) = \lim_{\omega} \frac{a_n}{a} |s - t| = |s - t|$$

Par conséquent  $\gamma$  est une géodésique entre  $y$  et  $z$  ce qui termine la preuve. ■

**Proposition 3.5.3** Soient  $(X_n, x_n^0)$  une suite pointé d'espaces métrique et  $\omega$  un ultra-filtre non principal. On suppose que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'espace  $X_n$  est géodésique et  $\delta_n$ -hyperbolique où  $\delta_n$  est une suite qui converge vers 0. Alors  $\lim_{\omega} X_n$  est un arbre réel.

*Démonstration.* On sait déjà d'après la proposition 3.5.2 que  $\lim_{\omega} X_n$  est géodésique. Il suffit donc de montrer que  $\lim_{\omega} X_n$  est 0-hyperbolique (cf. exercice 3.9). Pour cela on se donne quatre points  $x = \lim_{\omega} x_n, y = \lim_{\omega} y_n, z = \lim_{\omega} z_n$  et  $t = \lim_{\omega} t_n$  dans  $\lim_{\omega} X_n$ . Puisque  $X_n$  est  $\delta_n$ -hyperbolique, on a pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\langle x_n, z_n \rangle_{t_n} \geq \min \{ \langle x_n, y_n \rangle_{t_n}, \langle y_n, z_n \rangle_{t_n} \} - \delta_n.$$

En passant à la limite, il vient

$$\langle x, z \rangle_t \geq \min \{ \langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t \}.$$

Donc  $\lim_{\omega} X_n$  est 0-hyperbolique. ■

**Exercice 3.11** Soient  $(X_n, x_n^0)$  une suite pointé d'espaces métrique et  $\omega$  un ultra-filtre non principal. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on fixe une partie  $Y_n$  de  $X_n$  de sorte que  $d(x_n^0, Y_n)$  est uniformément bornée. On note alors

$$\lim_{\omega} Y_n = \left\{ y = \lim_{\omega} y_n : y_n \in Y_n, \omega\text{-pp} \right\}.$$

- (i) Montrer que  $\lim_{\omega} Y_n$  est non vide.
- (ii) Si  $z = \lim_{\omega} z_n$  est un point de  $\lim_{\omega} X_n$ , montrer que

$$d(z, \lim_{\omega} Y_n) = \lim_{\omega} d(z_n, Y_n).$$

## 3.6 Stabilité des quasi-géodésiques

Le but de cette section est de démontrer le théorème 3.4.2. Il existe différentes preuves dans la littérature. On va utiliser ici un point de vue asymptotique, qui consiste à regarder un espace hyperbolique « de très loin », un genre de zoom arrière infini, pour se ramener au cas plus facile des arbres.

### 3.6.1 Le cas limite.

Soit  $X$  un arbre réel (exercice 3.9). Soit  $\kappa \geq 1$ . Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  une  $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésique. En particulier,  $\gamma$  est un arc. Par définition d'un arbre,  $\gamma$  se confond avec la géodésique entre le même extrémités. Ce qui se reformule de la manière suivante.

**Proposition 3.6.1** Soit  $X$  un arbre réel. Soit  $\kappa \geq 1$ . La distance de Hausdorff entre deux  $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésiques de  $X$  ayant les mêmes extrémités est nulle.

### 3.6.2 Le cas général.

On s'attelle maintenant à la preuve du cas générale. La démonstration se fait par l'absurde. Affirmer que le théorème est faux fournit une famille de contre exemples (un espace et deux quasi-géodésiques). En utilisant une limite d'espace métrique on va faire dégénérer cette suite de contre-exemples vers un cas limite : deux chemins bi-Lipschitz dans un arbre réel. L'analyse de ce cas limite va nous fournir une contradiction.

*Démonstration du théorème 3.4.2.* On fixe  $\delta \geq 0$ ,  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ . Supposons que le théorème soit faux. En particulier pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe

- un espace géodésique  $\delta$ -hyperbolique  $X_n$
- deux  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésiques  $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow X_n$  et  $\nu_n : [b_n, c_n] \rightarrow X_n$  de  $X_n$  ayant les mêmes extrémités et satisfaisant  $d_H(\gamma_n, \nu_n) \geq n$ .

**Etape 1 (Renormalisation).** Quitte à inverser les rôles de  $\gamma_n$  et  $\nu_n$  on peut supposer que  $\gamma_n$  n'est pas dans le  $n$ -voisinage de  $\nu_n$ . On reparamètre  $\gamma_n$  de sorte que  $0 \in [a_n, b_n]$  et

$$d(\gamma_n(0), \nu_n) \geq \sup_{s \in [a_n, b_n]} d(\gamma_n(s), \nu_n) - 1.$$

Autrement dit  $\gamma_n(0)$  est grosso modo le point de  $\gamma_n$  le plus éloigné de  $\nu_n$ . A nouveau quitte à reparamétrer  $\nu_n$  on peut supposer que  $0 \in [c_n, d_n]$  et

$$d(\gamma_n(0), \nu_n) \leq d(\gamma_n(0), \nu_n(0)) \leq d(\gamma_n(0), \nu_n) + 1.$$

Il découle de nos hypothèses que  $D_n = d(\gamma_n(0), \nu_n(0))$  est minoré par  $n - 1$ . En particulier  $D_n$  diverge vers l'infini. A partir de maintenant on va travailler dans l'espace renormalisé  $X'_n = D_n^{-1}X_n$ . C'est à dire que si  $x, x'$  sont deux points de  $X_n$  alors

$$d_{X'_n}(x, x') = \frac{1}{D_n} d_{X_n}(x, x').$$

Pour s'accorder avec cette renormalisation, il nous faut aussi modifier les chemines  $\gamma_n$  et  $\nu_n$ . On pose donc

$$\begin{array}{ccc} \gamma'_n : \left[ \frac{a_n}{D_n}, \frac{b_n}{D_n} \right] & \rightarrow & X'_n \\ s & \rightarrow & \gamma_n(sD_n) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \nu'_n : \left[ \frac{c_n}{D_n}, \frac{d_n}{D_n} \right] & \rightarrow & X'_n \\ s & \rightarrow & \nu_n(sD_n) \end{array}$$

On vérifie que  $\gamma'_n$  et  $\nu'_n$  sont des  $(\kappa, \ell_n)$  quasi-géodésiques de  $X'_n$  avec  $\ell_n = D_n^{-1}\ell$ . En effet pour tout  $s, t \in [D_n^{-1}a_n, D_n^{-1}b_n]$  on a

$$d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) = \frac{1}{D_n} d_{X_n}(\gamma_n(sD_n), \gamma_n(tD_n)).$$

Puisque  $\gamma_n$  est une  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique de  $X_n$ , on en déduit

$$\frac{1}{D_n} \left( \kappa^{-1} |sD_n - tD_n| - \ell \right) \leq d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) \leq \frac{1}{D_n} \left( \kappa |sD_n - tD_n| + \ell \right)$$

Ce qui se réécrit

$$\kappa^{-1} |s - t| - \frac{\ell}{D_n} \leq d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) \leq \kappa |s - t| + \frac{\ell}{D_n}$$

D'où le résultat. La preuve pour  $\nu'_n$  est identique.

**Etape 2 (Passage à la limite).** On fixe maintenant un ultra-filtre non-principal  $\omega$ . On choisit comme point base  $x_n^0 = \gamma'_n(0) = \gamma_n(0)$ . Pour simplifier on appelle  $X'$  l'espace limite

$$X' = \lim_{\omega} (X'_n, x_n^0).$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'espace  $X'_n$  est géodésique et  $\delta_n$ -hyperbolique, avec  $\delta_n = D_n^{-1}\delta$ . En particulier  $\delta_n$  converge vers 0. Donc  $X'$  est un arbre réel (Proposition 3.5.3). Il nous faut maintenant définir



la limite des chemins  $\gamma'_n$  et  $v'_n$ . L'idée est semblable à la preuve de la proposition 3.5.2. Il faut cependant faire attention que les bornes  $D_n^{-1}a_n$  et  $D_n^{-1}b_n$  du domaine de définition de  $\gamma'_n$  peuvent diverger. Aussi on définit  $a$  comme  $a = \lim_{\omega} D_n^{-1}a_n$  si la limite existe et est finie et  $a = -\infty$  sinon. De même on pose  $b = \lim_{\omega} D_n^{-1}b_n$  si la limite existe et est finie et  $b = +\infty$  sinon. On peut alors considérer le chemin

$$\begin{aligned} \gamma' : (a, b) &\rightarrow X' \\ s &\rightarrow \lim_{\omega} \gamma'_n(s) \end{aligned}$$

Les bornes de l'intervalle  $(a, b)$  sont ouvertes ou fermées selon que  $a$  et  $b$  sont infinis ou finis. Le chemin  $\gamma'$  ainsi obtenu est une  $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésique. En effet, fixons  $s, t \in [a, b]$ , on a vu que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a

$$\kappa^{-1}|s-t| - \frac{\ell}{D_n} \leq d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) \leq \kappa|s-t| + \frac{\ell}{D_n}.$$

Puisque  $D_n$  diverge vers l'infini, en passage à la limite, il reste

$$\kappa^{-1}|s-t| \leq d_{X'}(\gamma'(s), \gamma'(t)) \leq \kappa|s-t|.$$

En particulier,  $\gamma'$  est (modulo reparamétrisation) une géodésique de  $X'$ . En procédant de la même manière on définit une  $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésique  $v' : (c, d) \rightarrow X'$ . Par ailleurs il découle de notre choix de renormalisation que pour tout

$$d_{X'}(\gamma'(0), v') = 1 \quad \text{tandis que} \quad d_{X'}(\gamma'(s), v') \leq 1, \quad \forall s \in (a, b)$$

(On se reportera à l'exercice 3.11 pour les détails de la preuve.)

**Etape 3 (Cas limite).** Le chemin  $\gamma'$  est donc à dans le 1-voisinage de  $v'$  et n'est pas confondu avec  $v'$ . Si  $a$  est fini, alors  $c$  aussi et les chemins  $\gamma'$  et  $v'$  ont la même origine. De même si  $b$  est fini alors  $d$  aussi et les chemins  $\gamma'$  et  $v'$  ont le même point terminal. On distingue alors trois cas (faire des dessins). On observe que dans ces trois cas,  $\gamma'$  ne peut pas être dans le 1-voisinage de  $v'$  sans être confondu avec  $v'$ . D'où la contradiction. ■

## 3.7 Groupes hyperboliques

**Definition 3.7.1** Un groupe  $G$  est *hyperbolique* (au sens de Gromov) s'il admet une action proprement discontinue et co-compacte sur un espace géodésique propre et hyperbolique.

Puisque « être hyperbolique » est une propriété invariante par quasi-isométries, il découle du lemme de Milnor-Švarc (proposition 1.2.2), qu'un groupe  $G$  est hyperbolique si et seulement si il existe une partie génératrice finie  $S$  de  $G$  tel que  $\text{Cay}(G, S)$  est hyperbolique.

### ■ Exemple 3.3

- (i) Tous les groupes finis sont hyperboliques (l'action triviale sur un point est proprement discontinue et co-compact).
- (ii)  $\mathbf{Z}$  est hyperbolique. Plus généralement les groupes libres de type fini sont hyperboliques. Par contre  $\mathbf{Z}^2$  (et plus généralement  $\mathbf{Z}^n$  pour  $n \geq 2$ ) n'est pas hyperbolique.
- (iii) Si  $\Sigma$  est une surface compacte de genre  $g \geq 2$ , alors son groupe fondamental  $\pi_1(\Sigma)$  est hyperbolique. En effet  $\pi_1(\Sigma)$  agit de façon proprement discontinue et co-compact sur le revêtement universel de  $\Sigma$  qu'on peut identifier au plan hyperbolique  $\mathbf{H}^2$ . Plus généralement, si  $M$  est une variété Riemannienne compacte dont la courbure sectionnelle est négativement majorée, alors son groupe fondamental est hyperbolique.

(iv) Soient  $A$  et  $B$  deux groupes finis. Alors  $A * B$  est hyperbolique (exercice). ■

On verra plus tard que un groupe tiré « au hasard » (dans un sens à préciser) est toujours hyperbolique !

**Exercice 3.12** Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe d'indice fini de  $G$ . Montrer que  $G$  est hyperbolique si et seulement si  $H$  est hyperbolique. ■

### 3.8 Problèmes et exercices

Quelques problèmes supplémentaires pour se familiariser avec les notions introduites jusqu'à présent.

#### 3.8.1 Stabilité des quasi-géodésiques locales

L'objectif de ce problème est de démontrer la version plus forte de la stabilité des quasi-géodésiques vue en cours. Étant donnés  $\kappa \in \mathbf{R}_+^*$  et  $L, \ell \in \mathbf{R}_+$ , une  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique  $L$ -locale est un chemin  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  tel que pour tout  $s, t \in [a, b]$  vérifiant  $|s - t| \leq L$  on a

$$\kappa^{-1} |s - t| - \ell \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \kappa |s - t| + \ell.$$

On va démontrer l'énoncé suivant

**Theorem 3.8.1** Soit  $\delta \geq 0$ ,  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ . Il existe  $L \geq 0$  et  $D \geq 0$ , tels que si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésiques  $L$ -locales d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$  ayant les mêmes extrémités alors  $\gamma_1$  est dans le  $D$ -voisinage de  $\gamma_2$  (et vice versa).

#### Passage du local au global.

On note  $X$  un espace géodésique  $\delta$ -hyperbolique.

(i) Soient  $a > 0$  et  $m \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ . Soient  $x_0, \dots, x_m \in X$  une suite de points tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ , on a

$$\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < \frac{1}{2} \min \{d(x_i, x_{i-1}), d(x_i, x_{i+1})\} - a - \delta.$$

— Montrer que  $\langle x_0, x_m \rangle_{x_{m-1}} \leq \langle x_{m-2}, x_m \rangle_{x_{m-1}} + \delta$ .

— En déduire que  $d(x_0, x_m) \geq 2am$ .

Pour chaque question on pourra faire une récurrence sur  $m$ .

Fixons maintenant  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ .

(ii) Soit  $\kappa' > \kappa$ . Montrer qu'il existe  $L \geq 0$  tel que toute  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique  $L$ -locale  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  est aussi une  $(\kappa', \ell)$ -quasi-géodésique globale.

(iii) Montrer qu'il existe  $L \geq 0$  et  $D \geq 0$ , tels que si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésiques  $L$ -locales ayant les mêmes extrémités alors  $\gamma_1$  est dans le  $D$ -voisinage de  $\gamma_2$  (et vice versa).

#### Application aux groupes hyperboliques.

Soit  $G$  un groupe engendré par une partie finie  $S$ . On dit que *le problème du mot est résoluble dans  $G$*  s'il existe un algorithme qui étant un mot  $w$  sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$  décide si  $w$  représente l'élément trivial de  $G$ . L'objectif des questions suivantes est de montrer que le problème du mot est résoluble dans un groupe hyperbolique.

On se donne une présentation finie  $\langle S \mid R \rangle$  de  $G$ . Si  $w$  est un mot sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$  on note  $|w|$  sa longueur. On dit que  $\langle S \mid R \rangle$  est une *présentation de Dehn* si elle vérifie la propriété suivante : pour tout mot réduit  $w$  sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$  représentant l'élément trivial de  $G$ , il existe  $r \in R$ , qui se décompose de la manière suivante  $r = r_1 r_2$ , avec  $|r_1| < |r_2|$ , de sorte que  $r_2$  est un *sous-mot* de  $w$ .

- (iv) Montrer que si le groupe  $G$  admet une présentation de Dehn, alors le problème du mot est résoluble pour  $G$ .
- (v) Montrer que tout groupe hyperbolique admet une présentation de Dehn.

### 3.8.2 Cone asymptotique

Soit  $X$  un espace métrique. Soit  $\omega$  un ultra-filtre non-principal. On se donne une suite de points de  $X$  notée  $x = (x_n)$  et une suite réelle  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  convergent vers 0. Le *cône asymptotique* de  $X$  relativement à  $x$ ,  $\varepsilon$  et  $\omega$  est l'espace métrique

$$\text{Con}_\omega(X, x, \varepsilon) = \lim_\omega (\varepsilon_n X, x_n).$$

où  $\varepsilon_n X$  est l'espace  $X$  renormalisé par  $\varepsilon_n$ , c'est à dire  $d_{\varepsilon_n X}(p, q) = \varepsilon_n d_X(p, q)$ .

- (i) Soit  $f: X \rightarrow Y$  une quasi-isométrie entre  $X$  et un autre espace métrique  $Y$ . On considère la suite  $y = (f(x_n))$ . Montrer que  $\text{Con}_\omega(X, x, \varepsilon)$  et  $\text{Con}_\omega(Y, y, \varepsilon)$  sont homéomorphes.
- (ii) Montrer que  $\mathbf{Z}^2$  et  $\mathbf{Z}^3$  ne sont pas quasi-isométriques.

### 3.8.3 Groupe d'automorphisme extérieur d'un groupe hyperbolique

Soit  $G$  un groupe. Pour tout  $h \in G$ , on note  $\iota_h: G \rightarrow G$  la conjugaison par  $h$ , c'est à dire l'application qui envoie  $g$  sur  $hgh^{-1}$ . On note  $\text{Aut}(G)$  l'ensemble des automorphismes de  $G$ . Le sous-ensemble

$$\text{Int}(G) = \{\iota_h : h \in G\}$$

est un sous-groupe normal de  $\text{Aut}(G)$ . Le *groupe des automorphismes extérieurs* de  $G$ , noté  $\text{Out}(G)$ , est le quotient  $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$ .

On fixe maintenant un espace propre géodésique et  $\delta$ -hyperbolique  $X$  ainsi qu'un groupe  $G$  agissant par isométries sur  $X$  de façon proprement discontinue et co-compacte. Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $G$ . Pour tout  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  on définit le *déplacement minimal* de  $\varphi$  comme

$$\lambda(\varphi) = \inf_{x \in X} \max_{s \in S} d(\varphi(s)x, x).$$

- (i) Montrer que si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux automorphismes de  $G$  ayant la même image dans  $\text{Out}(G)$  alors  $\lambda(\varphi_1) = \lambda(\varphi_2)$ .

A partir de maintenant on suppose que  $\text{Out}(G)$  est infini.

(ii) Montrer qu'il existe une suite  $(\varphi_n)$  d'automorphismes de  $G$  telle que  $\lambda(\varphi_n)$  tends vers l'infini. On se donne un ultra-filtre non-principal  $\omega$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $X_n$  une copie de l'espace  $X$  renormalisée par  $1/\lambda(\varphi_n)$ . On munit  $X_n$  d'une action « tordue » de  $G$  définie ainsi : pour tout  $g \in G$ , pour tout  $x \in X_n$ , on pose  $g \cdot x = \varphi_n(g)x$ .

- (iii) Montrer qu'il existe une suite de points  $(x_n^0)$  tel que pour tout  $s \in S$ , on a

$$d(s \cdot x_n^0, x_n^0) \leq 2.$$

- (iv) Montrer que l'espace  $X_\omega = \lim_\omega (X_n, x_n^0)$  est un arbre réel.

(v) Montrer que l'action tordue de  $G$  sur  $X_n$  induit une action par isométries de  $G$  sur  $X_\omega$ .

(vi) Montre que l'action de  $G$  sur  $X_\omega$  n'a pas de point fixe global.

Soient  $p, q$  et  $r$  trois entiers supérieurs à 100. On admettra que le groupe  $G$  donné par la présentation

$$G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1 \rangle$$

est hyperbolique.

- (vii) Montrer que le groupe d'automorphismes extérieurs de  $G$  est fini.



## 4. Isométries d'un espace hyperbolique

On a vu dans la section 2.2 que les isométries d'un arbre sont de deux types : elliptique ou loxodromique. Ces isométries ont un comportement très particulier. Une isométrie elliptique fixe (au moins) un point dans l'arbre. Une isométrie loxodromique a un axe invariant le long duquel elle agit par translation. On va voir maintenant que les isométries d'un espace hyperbolique ont des propriétés très similaires.

A partir de maintenant on fixe un espace géodésique  $X$  supposé  $\delta$ -hyperbolique.

### 4.1 Longueurs de translation

Étant donné une isométrie  $g$  de  $X$  on définit sa *longueur de translation* par

$$\|g\| = \inf_{x \in X} d(gx, x).$$

Sa *longueur de translation stable* est

$$\|g\|^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(g^n x, x)}{n}.$$

L'existence de cette limite découle de propriété des suites sous-additive (cf. Lemme de Fekete). Par ailleurs le résultat ne dépend pas du choix du point  $x \in X$  (exercice). On remarque pour tout  $x \in X$ ,

$$\|g\|^\infty \leq \|g\| \leq d(gx, x).$$

Par ailleurs  $\|g^n\|^\infty = |n| \cdot \|g\|^\infty$ , pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Dans un espace hyperbolique ces deux longueurs de translation sont à peu près les mêmes

**Lemma 4.1.1** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . Ses longueurs de translation satisfont

$$\|g\|^\infty \leq \|g\| \leq \|g\|^\infty + 8\delta.$$

*Démonstration.* La première inégalité découle des observations ci-dessus. On se concentre sur la seconde inégalité. Soit  $x \in X$ . On note  $m$  le milieu d'une géodésique  $[x, gx]$ , de sorte que  $gm$  est le milieu de  $[gx, g^2x]$ . On a lors de l'étude des triangles étroit – voir l'inégalité (3.3) – que

$$d(gm, m) \leq \max \left\{ |d(gx, m) - d(gx, gm)|, d(gx, m) + d(gx, gm) - 2 \langle x, g^2x \rangle_{gx} \right\} + 4\delta.$$

Puisque  $m$  est le milieu de  $[x, gx]$ , l'inégalité précédente devient

$$d(gm, m) \leq \max \{0, d(g^2x, gx) - d(gx, x)\} + 4\delta.$$

Ainsi soit  $d(gm, m) \leq 4\delta$  soit  $d(gm, m) + d(gx, x) \leq d(g^2x, x) + 4\delta$ . Dans tous les cas on a  $2\|g\| \leq d(g^2x, x) + 8\delta$ . Cette dernière inégalité étant valable pour tout point  $x \in X$ , il vient

$$\|g\| \leq \frac{1}{2} \|g^2\| + 4\delta.$$

Une démonstration par récurrence montre alors que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , pour tout  $x \in X$ , on a

$$\|g\| \leq \frac{1}{2^n} \|g^{2^n}\| + 8 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \delta \leq \frac{1}{2^n} d(g^{2^n}x, x) + 8 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \delta$$

En passant à la limite, il vient  $\|g\| \leq \|g\|^\infty + 8\delta$ . ■

Bien que ces deux longueurs de translation soient différentes elles rendent des services quelque peu différents. Attardons nous sur un exemple pour comprendre l'intérêt de la longueur de translation stable. Supposons que  $X$  est un triangle équilatéral dans  $\mathbf{R}^2$  et  $g$  la rotation d'angle  $2\pi/3$  qui laisse le triangle invariant. On regarde  $X$  comme un espace métrique (muni de la métrique induite). En particulier, seuls les points des côtés du triangle sont dans  $X$ . Notons que  $X$  est hyperbolique (c'est un espace borné) et  $g$  une isométries d'ordre finie de  $X$ . Par analogie avec les arbres, on aimerait que la longueur de translation de  $g$  soit nulle. Ce n'est malheureusement pas le cas, puisque le point fixe de la rotation n'est pas un point de  $X$ . Cependant sa longueur de translation stable, elle est nulle.

**Definition 4.1.1 — Classification des isométries.** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . On dit que  $g$  est

- (i) *elliptique* si une de ses orbites est bornées.
- (ii) *parabolique* si  $\|g\|^\infty = 0$  est  $g$  admet une orbite non bornée
- (iii) *loxodromique* si  $\|g\|^\infty > 0$ .

#### Remarques.

Le choix de l'orbite dans la définition n'a pas d'importance. En effet une orbite de  $g$  est bornée si et seulement si toutes ses orbites sont bornées (c'est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire). Notons aussi que si  $g$  a une orbite bornée alors  $\|g\|^\infty = 0$  (exercice). Ainsi la longueur de translation stable d'une isométrie elliptique est toujours nulle. Par contreposée, les orbites d'une isométrie loxodromique ne sont jamais bornée. Comme le suggère la classification ci-dessus, on peut rencontrer des isométries  $g$  dont la longueur de translation stable est nulle, mais admettant une orbite non-bornée (en particulier  $g$  est d'ordre infini). Ces isométries paraboliques, sont un peu spéciale et n'existaient pas dans le cas d'un arbre. Un exemple d'isométrie parabolique dans le plan hyperbolique  $\mathbf{H}^2$  (vu comme le demi-plan supérieur de Poincaré) est la transformation  $g$  qui envoie  $(x, y)$  sur  $(x+1, y)$ . Faire un dessin !

**Exercice 4.1** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . Soit  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ . Montrer que  $g$  est elliptique (respectivement parabolique, loxodromique) si et seulement si  $g^n$  l'est aussi. ■

**Exercice 4.2** Soit  $G$  un groupe agissant par isométries sur deux espace métriques hyperboliques  $X_1$  et  $X_2$ . Soit  $f: X_1 \rightarrow X_2$  un plongement quasi-isométrique  $G$ -équivariant (i.e.  $f(gx) = gf(x)$  pour tout  $x \in X_1$  et  $g \in G$ ). Montrer que  $f$  est une isométrie elliptique (respectivement parabolique, loxodromique) de  $X_1$  si et seulement si  $f$  est une isométrie elliptiques (respectivement parabolique, loxodromique) de  $X_2$ . ■

## 4.2 Interlude : quasi-convexité

Dans le cas où l'espace  $X$  est un arbre réel on avait associé à une isométrie  $g$  un ensemble caractéristique  $C_g$ . On a vu que connaître l'ensemble caractéristique de  $g$  permet de « décrire » l'action de  $g$  sur  $X$  entier (cf. exercice 2.5). C'est ensemble caractéristique à la propriété d'être un sous-arbre de  $X$ . Autrement dit  $C_g$  est convexe : si  $x$  et  $y$  sont deux point de  $C_g$  la géodésique  $[x, y]$  est entièrement contenu dans  $C_g$ . Sur le même modèle, on aimerait associer aux isométries de l'espace hyperbolique un ensemble caractéristique. Cet ensemble ne sera pas tout à fait convexe. La notion de *quasi-convexité* permet de pallier ce défaut. On rappelle que  $X$  est un espace géodésique  $\delta$ -hyperbolique.

**Definition 4.2.1** Soit  $\alpha \geq 0$ . Une partie  $Y$  de  $X$  est  $\alpha$ -quasi-convexe si pour tout  $y, y' \in Y$ , toute géodésique  $[y, y']$  est contenue dans le  $\alpha$ -voisinage de  $Y$ .

**Vocabulary 4.1** On dira que  $Y$  est *quasi-convexe* s'il existe  $\alpha \geq 0$  tel que  $Y$  est  $\alpha$ -quasi-convexe. On appellera  $\alpha$  une *constante de quasi-convexité* ou avec un abus de langage la constante de quasi-convexité.

■ **Example 4.1** Les ensembles suivant sont quasi-convexes (exercice : donner une estimation de la constante de quasi-convexité  $\alpha$ ).

- (i) Une partie borné de  $X$ .
- (ii) Une géodésique de  $X$ .
- (iii) Une boule de  $X$ .
- (iv) Si  $f: Y \rightarrow X$  est un plongement quasi-isométrique d'un espace géodésique  $Y$  dans  $X$ , alors  $f(Y)$  est une partie quasi-convexe de  $X$  (utiliser la stabilité des quasi-géodésiques).
- (v) Si  $H$  est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe hyperbolique  $G$  alors  $H$  est une partie quasi-convexe de  $G$ . ■

**Exercice 4.3** Soit  $Y$  une partie de  $X$ . On appelle enveloppe convexe de  $Y$  et on note  $\text{Env}(Y)$  la réunion des géodésiques reliant deux points de  $Y$ . Montrer que  $\text{Env}(Y)$  est quasi-convexe. Donner une estimation de la constante de quasi-convexité. ■

On va maintenant essayer comprendre comment un point  $x \in X$  se projette sur une partie quasi-convexe  $Y$ . Toutefois on n'a pas supposé que  $X$  était localement compacte. Par ailleurs la partie  $Y$  n'est peut-être pas fermée. Par conséquent, il se peut que « la » projection de  $x$  sur  $Y$  n'existe peut-être pas. Toutefois, lorsqu'on travaille avec des espaces hyperboliques, on n'est pas à une « petite erreur » près. On se contentera donc de projections approximatives comme définies ci-dessous.

**Definition 4.2.2** Soit  $Y$  un partie de  $X$ . Soit  $\eta > 0$ . Soit  $x \in X$ . Un  $\eta$ -projection de  $x$  sur  $Y$  est un point  $y \in Y$  tel que  $d(x, y) \leq d(x, Y) + \eta$ . Une *projection* de  $x$  sur  $Y$  est une 0-projection de  $x$  sur  $Y$ .

On peut maintenant énoncer le résultat clef sur les partie quasi-convexes.

**Proposition 4.2.1** Soit  $Y$  une partie  $\alpha$ -quasi-convexe de  $X$ . Soient  $x, x' \in X$ . Soient  $p$  (respectivement  $p'$ ) une  $\eta$ -projection de  $x$  (respectivement  $x'$ ) sur  $Y$ . Alors

- (i) Pour tout  $y \in Z$  on a  $\langle x, y \rangle_p \leq \alpha + \eta + 4\delta$ .
- (ii) La distance entre  $x$  et  $x'$  vérifie

$$d(p, p') \leq \max \{ d(x, x') - d(x, p) - d(x', p') + 2\varepsilon, \varepsilon \}$$

où  $\varepsilon = 2\alpha + 2\eta + 5\delta$ .

**Remarques.**

- Le second point de la proposition s'interprète géométriquement de la manière suivante. Soient les projections  $p$  et  $p'$  sont proches (à distance au plus  $\varepsilon$ ) et l'histoire s'arrête là. Si au contraire  $d(p, p') > \varepsilon$  alors on a nécessairement

$$d(x, x') \geq d(x, p) + d(p, p') + d(p', x') - 2\varepsilon.$$

Notons que l'inégalité triangulaire nous donne une inégalité dans l'autre sens :

$$d(x, x') \leq d(x, p) + d(p, p') + d(p', x').$$

Ainsi le chemin obtenu en concaténant les géodésiques  $[x, p]$ ,  $[p, p']$  et  $[p', x']$  est « presque » une géodésique. Pour être précis c'est une  $(1, 2\varepsilon)$ -quasi-géodésique. Il en résulte que si  $p$  et  $p'$  sont suffisamment éloignés alors toute géodésique entre  $x$  et  $x'$  passe proche de  $Y$ .

- En appliquant la proposition avec  $x = x'$ , on voit que deux  $\eta$ -projections  $p$  et  $p'$  de  $x$  sur  $Y$  vérifient toujours  $d(p, p') \leq \varepsilon$ . Une  $\eta$ -projection n'est évidemment pas unique. Toutefois deux  $\eta$ -projections d'un même point sur une partie quasi-convexe sont toujours proches. Vu de loin, c'est comme si la projection était unique.

*Démonstration.* Commençons par le premier point. On se donne un point  $z$  sur une géodésique  $[x, p]$  tel que  $d(p, z) = \langle x, y \rangle_p$ . L'inégalité (3.3) (cf. preuve des triangles étroits) que  $z$  est à distance au plus  $4\delta$  d'un point de la géodésique  $[p, y]$ . Or cette géodésique est contenu dans le  $\alpha$ -voisinage de  $Y$ . Par conséquent

$$d(x, Y) \leq d(x, z) + \alpha + 4\delta \leq d(x, p) - \langle x, y \rangle_p + \alpha + 4\delta.$$

Rappelons que  $p$  est un  $\eta$ -projection de  $x$  sur  $Y$ . Il vient donc

$$d(x, Y) \leq d(x, p) - \langle x, y \rangle_p + \alpha + \eta + 4\delta,$$

d'où le résultat annoncé.

Passons au second point. L'inégalité à quatre points (3.2) donne

$$d(x, p') + d(x', p) \leq \max \{ d(x, x') + d(p, p'), d(x, p) + d(x', p') \} + 2\delta.$$

En appliquant le premier point avec  $y = p'$  on observe que  $\langle x, p' \rangle_p \leq \alpha + \eta + 4\delta$ . Par conséquence

$$d(x, p') = d(x, p) + d(p, p') - 2\langle x, p' \rangle_p \geq d(x, p) + d(p, p') - 2\alpha - 2\eta - 8\delta.$$

De façon symétrique, on a

$$d(x', p) \geq d(x', p') + d(p', p) - 2\alpha - 2\eta - 8\delta.$$

En combinant les trois inégalités précédentes on obtient

$$d(x, p) + d(x', p') + 2d(p, p') \leq \max \{ d(x, x') + d(p, p'), d(x, p) + d(x', p') \} + 2\varepsilon, \quad (4.1)$$

où  $\varepsilon = 2\alpha + 2\eta + 5\delta$ . Si le maximum dans (4.1) est atteint par  $d(x, x') + d(p, p')$  on obtient

$$d(p, p') \leq d(x, x') - d(x, p) - d(x', p') + 2\varepsilon.$$

Si le maximum dans (4.1) est atteint par  $d(x, p) + d(x', p')$  il vient alors  $d(p, p') \leq \varepsilon$ . Les deux cas réunis, correspondent au résultat annoncé. ■



**Exercice 4.4** Soit  $Y$  une partie  $\alpha$ -quasi-convexe de  $X$ . Montrer que pour tout  $A \geq \alpha$ , le  $A$ -voisinage de  $Y$  est  $8\delta$ -quasi-convexe. ■

**Exercice 4.5** Soient  $Y_1$  et  $Y_2$  deux parties respectivement  $\alpha$ -quasi-convexes de  $X$ . Montrer que si l'ensemble

$$Z = Y_1^{+\alpha+8\delta} \cap Y_2^{+\alpha+8\delta}$$

est non vide alors il est encore quasi-convexe. On rappelle que  $Y^{+A}$  représente le  $A$ -voisinage de  $Y$ . ■

### 4.3 Ensemble caractéristique

À partir de maintenant on supposera que  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique avec  $\delta > 0$ . Cette hypothèse n'est pas très coûteuse. En effet on a déjà traité le cas des arbres réels. En outre si  $X$  est 0-hyperbolique alors il est  $\delta$ -hyperbolique pour tout  $\delta > 0$ .

**Definition 4.3.1** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . On appelle *ensemble caractéristique* de  $g$  et on note  $C_g$  l'ensemble des points  $x \in X$  tels que  $d(gx, x) \leq \|g\| + 10\delta$ .

#### Remarques.

- Dans le cas des arbres réels, on a montré que la longueur de translation  $\|g\|$  était réalisée. Ce ne sera pas le cas ici. Pour cette raison on regarde l'ensemble des points qui réalisent la plus petite translation à  $\delta$ -près. Choisir  $\delta > 0$  évite d'introduire d'autres paramètres auxiliaires.
- L'ensemble caractéristique est invariant sous l'action de  $g$ .

La proposition suivante doit être mise en garde de la proposition 2.2.1.

**Proposition 4.3.1** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . L'ensemble caractéristique de  $g$  vérifie les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout  $x \in X$ , on a  $d(gx, x) \geq 2d(x, C_g) + \|g\| - 18\delta$ .
- (ii) Si  $x \in X$  est un point tel que  $d(gx, x) \leq \|g\| + A$  alors  $x$  est à distance au plus  $A/2 + 9\delta$  de  $C_g$ .
- (iii) L'ensemble caractéristique  $C_g$  est  $16\delta$ -quasi-convexe.

**R** Il découle de l'inégalité triangulaire que pour tout  $x \in X$  on a  $d(gx, x) \leq 2d(x, C_g) + \|g\| + 10\delta$ . Aussi le point (i) est une égalité à  $\delta$  près.

*Démonstration.* Soit  $x \in X$ . Remarquons que si  $x$  est dans  $C_g$  alors le point (i) est direct. On peut donc supposer que  $d(x, C_g) > 0$ . On fixe  $\eta > 0$  et  $y$  une  $\eta$ -projection de  $x$  sur  $C_g$ . On fixe une géodésique  $[y, gy]$  entre  $y$  et  $gy$ . Notons que si  $z$  est un point de cette géodésique alors l'inégalité triangulaire donne

$$d(gz, z) \leq d(gz, gy) + d(gy, z) = d(z, y) + d(gy, z) = d(y, gy) \leq \|g\| + 10\delta.$$

Ainsi toute la géodésique  $[y, gy]$  est contenue dans  $C_g$ . Puisque  $y$  est une  $\eta$ -projection de  $x$  sur  $C_g$  c'est aussi une  $\eta$ -projection de  $x$  sur  $[y, gy]$ . Comme  $C_g$  est invariant sous l'action de  $g$ , le point  $gy$  est une  $\eta$ -projection de  $gx$  sur  $C_g$  et donc sur  $[y, gy]$ . En tant que géodésique  $[y, gy]$  est  $2\delta$ -quasi-convexe. Aussi la proposition 4.2.1 appliquée avec  $[y, gy]$  donne

$$d(y, gy) \leq \max \{d(x, gx) - 2d(x, y) + 18\delta + 4\eta, 9\delta + 2\eta\} \quad (4.2)$$

Rappelons que  $x$  n'est pas dans  $C_g$ . Par définition de  $y$ , tout point  $z$  de  $[x, y]$  vérifiant  $d(x, z) < d(x, y) - \eta$  n'est pas dans  $C_g$  et vérifie donc  $d(gz, z) > \|g\| + 10\delta$ . Il en découle que  $d(gy, y) \geq$

$\|g\| + 10\delta - 2\eta$ . Autrement dit si  $\eta$  est suffisamment petit, le maximum dans (4.2) ne peut pas être atteint par  $9\delta + 2\eta$ . Ainsi on obtient

$$d(gx, x) \geq 2d(x, y) + d(gy, y) - 18\delta - 4\eta \geq 2d(x, C_g) + \|g\| - 18\delta - 4\eta.$$

Cette dernière inégalité est valable dès que  $\eta$  est suffisamment petit. Aussi  $d(gx, x) \geq 2d(x, C_g) + \|g\| - 18\delta$ , ce qui correspond au point (i). Le point (ii) est une conséquence de (i). On se concentre maintenant sur le point (iii). Soient  $y$  et  $y'$  deux points de  $C_g$  et  $[y, y']$  une géodésique entre ces points. Soit  $x$  un point sur  $[y, y']$ , de sorte que  $\langle y, y' \rangle_x = 0$ . On affirme que  $d(gx, x) \leq \|g\| + 14\delta$ . En appliquant deux fois l'inégalité à quatre points (3.1) il vient

$$\min \{ \langle y, gy \rangle_x, \langle gy, gy' \rangle_x, \langle gy', y' \rangle_x \} \leq \langle y, y' \rangle_x + 2\delta \leq 2\delta. \quad (4.3)$$

Supposons que le minimum soit atteint par  $\langle y, gy \rangle_x$ . L'inégalité triangulaire entraîne alors

$$d(gx, x) \leq d(gy, y) + 2 \langle y, gy \rangle_x \leq \|g\| + 12\delta.$$

Si le minimum dans (4.3) est atteint par  $\langle gy', y' \rangle_x$ , on montre de même que  $d(gx, x) \leq \|g\| + 12\delta$ . Supposons maintenant que le minimum dans (4.3) est par  $\langle gy, gy' \rangle_x$ . Ainsi  $\langle gy, gy' \rangle_x \leq 2\delta$ . En appliquant l'inégalité à quatre points (3.2) on a

$$d(gx, x) + d(gy, gy') \leq \max \{ d(gx, gy) + d(x, gy'), d(gx, gy') + d(x, gy) \} + 2\delta. \quad (4.4)$$

Or l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} d(gx, gy) + d(x, gy') &\leq d(gy, y) + d(gy, gy') + 2 \langle gy, gy' \rangle_x \\ &\leq d(gy, y) + d(gy, gy') + 4\delta \\ &\leq \|g\| + d(gy, gy') + 14\delta \end{aligned}$$

La même inégalité reste vraie en inversant les rôles de  $y$  et  $y'$ . Ainsi (4.4) devient  $d(gx, x) \leq \|g\| + 14\delta$ , ce qui est l'inégalité annoncée. Il découle alors du point (ii) que  $x$  est distance au plus  $16\delta$  de  $C_g$ . Autrement dit  $[y, y']$  est contenu dans le  $16\delta$ -voisinage de  $C_g$ . ■

**Corollary 4.3.2** Soit  $x \in X$  et  $g$  une isométrie de  $X$ . Soit  $m$  le milieu d'une géodésique  $[x, gx]$ . Le point  $m$  est à distance au plus  $26\delta$  de  $C_g$ .

*Démonstration.* On note  $y \in C_g$  une  $\delta$ -projection de  $x$  sur  $C_g$ . Puisque les triangles de  $X$  sont  $4\delta$ -étroits, le point  $m$  est à distance au plus  $8\delta$  de la réunion  $[x, y] \cup [y, gy] \cup [gy, y]$  (faire un dessin !). Supposons d'abord que  $m$  est à distance  $8\delta$  de  $[y, gy]$ . Rappelons que  $C_g$  est invariant sous l'action de  $g$ . Par conséquent, les points  $y$  et  $gy$  sont dans  $C_g$  qui, d'après la proposition 4.3.1 (iii), est  $16\delta$ -quasi-convexe. Aussi le point  $m$  est à distance au plus  $24\delta$  de  $C_g$ . Supposons maintenant que  $m$  est à distance  $8\delta$  d'un point  $p$  sur  $[x, y]$ . Puisque  $C_g$  est stable par  $g$ , le point  $gy$  est une  $\delta$ -projection de  $gx$  sur  $C_g$ . D'après la proposition 4.3.1 (i) on a

$$d(gx, x) \geq 2d(x, y) + \|g\| - 20\delta \geq 2d(x, y) - 20\delta.$$

Ainsi

$$d(x, p) \geq d(x, m) - 8\delta \geq d(x, y) - 18\delta$$

Le point  $p$  étant sur la géodésique  $[x, y]$ , la distance  $d(p, y)$  est majorée par  $18\delta$ . L'inégalité triangulaire nous donne alors

$$d(m, y) \leq d(m, p) + d(p, y) \leq 26\delta.$$

En particulier  $m$  est à distance au plus  $26\delta$  de  $C_g$ . La preuve fonctionne de même si  $m$  est à distance au plus  $8\delta$  d'un point de  $[gy, gx]$ . ■

## 4.4 Études des isométries selon leur type

### 4.4.1 Isométries elliptiques.

Par définition une isométrie  $g$  de  $X$  est elliptique si ses orbites sont bornées. On va voir qu'en fait une telle isométrie admet toujours une petite orbite (dont le diamètre est environ de l'ordre de  $\delta$ ). Pour démontrer ce fait on introduit le centre de la boule circonscrite d'une partie bornée.

Soit  $Y$  une partie bornée de  $X$ . Pour tout  $x \in X$ , on pose

$$r_Y(x) = \inf \{r \in \mathbf{R}_+ : Y \subset B(x, r)\}.$$

Ici  $B(x, r)$  désigne la boule (ouverte) de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Le *rayon de la boule circonscrite* de  $Y$  est la quantité

$$r_Y = \inf_{x \in X} r(x).$$

Ce rayon  $r_Y$  n'est pas atteint pour un point  $x \in X$ . Toutefois la proposition suivante nous dit que deux qui réalise presque  $r_Y$  sont en fait proche... ce qui est amplement suffisant pour étudier l'action à large échelle de  $g$ .

**Proposition 4.4.1** Soit  $Y$  une partie bornée de  $X$ . Soit  $\eta > 0$ . Soient  $x, x' \in X$  tels que

$$\max\{r_Y(x), r_Y(x')\} \leq r_Y + \eta.$$

Alors  $d(x, x') \leq 2\eta + 4\delta$ .

*Démonstration.* Notons  $m$  le milieu d'une géodésique  $[x, x']$ . Soit  $y$  un point de  $Y$ . D'après l'inégalité à quatre points (3.2) on a

$$d(x, x') + d(y, m) \leq \max\{d(x, y) + d(x', m), d(x', y) + d(x, m)\} + 2\delta.$$

Rappelons que  $d(x, m) = d(x', m) = d(x, x')/2$ . Ainsi on obtient

$$\frac{1}{2}d(x, x') + d(y, m) \leq \max\{r_Y(x), r_Y(x')\} + 2\delta \leq r_Y + \eta + 2\delta.$$

Cette inégalité est valide pour tout les points  $y \in Y$ . Aussi

$$r_Y \leq r_Y(m) \leq r_Y - \frac{1}{2}d(x, x') + \eta + 2\delta,$$

d'où il vient  $d(x, x') \leq 2\eta + 4\delta$ . ■

**Corollary 4.4.2** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . Si  $g$  est elliptique alors  $g$  admet une orbite de diamètre au plus  $6\delta$ .

*Démonstration.* Soit  $y \in X$ . On note  $Y = \{g^k y : k \in \mathbf{Z}\}$ , l'orbite de  $g$ . Par définition c'est un ensemble borné. Fixons  $x \in X$  tel que  $r_Y(x) \leq r_Y + \delta$ . Soit  $m \in \mathbf{Z}$ . Puisque  $Y$  est invariant sous l'action de  $g$  et donc de  $g^m$ , le point  $g^m x$  vérifie aussi  $r_Y(g^m x) \leq r_Y + \delta$ . Il découle du lemme précédent que  $d(g^m x, x) \leq 6\delta$ . Ainsi l'orbite de  $x$  sous l'action de  $g$  est de diamètre au plus  $6\delta$ . ■

**R** Le résultat énoncé est en fait plus général. En effet supposons que  $G$  est un groupe agissant par isométries sur  $X$  dont les orbites sont bornées. Alors  $G$  admet une orbite de diamètre au plus  $6\delta$  (exercice).

#### 4.4.2 Isométries loxodromiques.

**Proposition 4.4.3** Soit  $x \in X$ . Un isométrie  $g$  de  $X$  est loxodromique si et seulement si l'application orbite  $\mathbf{Z} \rightarrow X$  qui envoie  $n$  sur  $g^n$  est un plongement quasi-isométrique.

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $g$  est loxodromique. Alors pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on

$$|n| \cdot \|g\|^\infty \leq d(g^n x, x) \leq |n| d(gx, x)$$

La dernière inégalité est une application de l'inégalité triangulaire. Aussi pour tout  $p, q \in \mathbf{Z}$ , il vient

$$|p - q| \cdot \|g\|^\infty \leq d(g^p x, g^q x) \leq |p - q| d(gx, x)$$

Comme  $\|g\|^\infty > 0$ , l'application orbite est un plongement quasi-isométrique. Supposons maintenant que l'application orbite est un plongement  $(\kappa, \ell)$ -quasi-isométrique (avec  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ ). En particulier pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $d(g^n x, x) \geq \kappa^{-1}n - \ell$ . En divisant par  $n$  et en passant à la limite, on obtient  $\|g\|^\infty \geq \kappa^{-1} > 0$ . Donc  $g$  est loxodromique. ■

#### Remarques.

La preuve précédente nous dit que si  $x \in X$  est dans l'ensemble caractéristique  $C_g$  de  $g$  alors l'application  $\mathbf{Z} \rightarrow X$  qui envoie  $n$  sur  $g^n$  est un plongement  $(\kappa, 0)$ -quasi-isométrique où la constante

$$\kappa = \max \left\{ \frac{1}{\|g\|^\infty}, \|g\| + 10\delta \right\}.$$

ne dépend pas du point  $x$  dans  $C_g$ .

**Corollary 4.4.4** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . Si  $g$  est loxodromique alors son ensemble caractéristique  $C_g$  est quasi-isométrique à  $\mathbf{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in C_g$ . On se donne une géodésique  $\gamma: [0, T] \rightarrow X$  entre  $x$  et  $gx$ . On étend  $\gamma$  en un chemin bi-infini  $g$ -invariant  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow X$  en posant  $\gamma(mT + t) = g^m \gamma(t)$  pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ , pour tout  $t \in [0, T)$ . Il découle de l'observation précédente que  $\gamma$  est une  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique où  $\kappa$  et  $\ell$  sont des paramètres qui ne dépendent que de  $g$  et non du point  $x$ . En particulier  $\gamma$  est quasi-isométrique à  $\mathbf{R}$ . Il suffit donc de montrer qu'il existe  $R \geq 0$  tel que tout point de  $C_g$  est à distance au plus  $R$  de  $C_g$ . Notons  $D = D(\kappa, \ell, \delta)$  la constante donnée par la stabilité des quasi-géodésiques (théorème 3.4.2). Soit  $y \in X$  un autre point de  $C_g$ . On se fixe une géodésique  $\nu: [0, S] \rightarrow X$  reliant  $y$  et  $gy$ . En suivant le même procédé que pour  $\gamma$ , on étend  $\nu$  en une  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique bi-infinie, invariante sous l'action de  $g$ . On pose  $d = d(x, y) = d(\gamma(0), \nu(0))$ . Prenons  $n \in \mathbf{N}$  de sorte que  $d(g^n y, y) = d(\nu(nS), \nu(0)) > d + D + 8\delta$ . D'après la stabilité des quasi-géodésiques, le point  $y$  est à distance au plus  $D$  de la géodésique  $[g^{-n}y, g^n y]$ . Puisque les triangles de  $X$  sont  $4\delta$ -étroits, cette dernière est dans le  $8\delta$ -voisinage de  $[g^{-n}y, g^{-n}x] \cup [g^{-n}x, g^n x] \cup [g^n x, g^n y]$ . En particulier,  $y$  est à distance au plus  $D + 4\delta$  d'un point  $z$  sur  $[g^{-n}y, g^{-n}x] \cup [g^{-n}x, g^n x] \cup [g^n x, g^n y]$ . On affirme que ce point  $z$  ne peut pas se trouver sur  $[g^n x, g^n y]$ . En effet, l'inégalité triangulaire entraînerait que

$$d(y, g^n y) \leq d(y, z) + d(z, g^n y) \leq d(y, z) + d(g^n x, g^n y) \leq d(y, z) + d(x, y) \leq d + D + 8\delta,$$

ce qui contredirait notre choix de  $n$ . Par symétrie,  $z$  ne peut pas non plus se trouver sur  $[g^{-n}y, g^{-n}x]$ . Par conséquent  $y$  est à distance au plus  $D + 8\delta$  d'un point de  $[g^{-n}x, g^n x]$ . Rappelons que  $g^{-n}x$  et  $g^n x$  sont deux points sur  $\gamma$ . D'après la stabilité des quasi-géodésiques,  $[g^{-n}x, g^n x]$  est contenue dans le  $D$ -voisinage de  $\gamma$ . Ainsi le point  $y$  est à distance au plus  $R = 2D + 8\delta$  de  $\gamma$ , ce qui termine la preuve. ■

On va maintenant donner une condition suffisante simple pour montrer qu'une isométrie est loxodromique. On rappelle le phénomène de passage local-global étudié en devoir maison.

**Lemma 4.4.5** Soit  $x_0, x_1, \dots, x_m$  une suite de points de  $X$ . Soit  $a > 0$ . On suppose que pour tout  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  on a

$$\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < \frac{1}{2} \min \{d(x_i, x_{i-1}), d(x_i, x_{i+1})\} - a - \delta$$

Alors pour tout  $i, j \in \{0, \dots, m\}$ , on a  $d(x_i, x_j) \geq 2a|i-j|$ .

**Proposition 4.4.6** Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . On suppose qu'il existe un point  $x \in X$  tel que

$$\langle g^{-1}x, gx \rangle_x < \frac{1}{2}d(gx, x) - \delta.$$

Alors  $g$  est loxodromique.

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  on note  $x_n$  le point  $x_n = g^n x$ . Notons que pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  on a

- $d(x_n, x_{n+1}) = d(gx, x)$ .
- $\langle x_{n-1}, x_{n+1} \rangle_{x_n} = \langle g^{-1}x, gx \rangle_x$ .

Notre hypothèse dit donc que la suite  $(x_n)$  vérifie les conditions du lemme 4.4.5 pour un nombre  $a$  tel que

$$0 < a < \frac{1}{2}d(gx, x) - \langle g^{-1}x, gx \rangle_x - \delta.$$

Par conséquent l'application orbite  $\mathbf{Z} \rightarrow X$  qui envoie  $n$  sur  $g^n x$  est un plongement quasi-isométrique. En effet pour tout  $p, q \in \mathbf{Z}$ , on a

$$2a|p-q| \leq d(g^p x, g^q x) \leq |p-q|d(gx, x)$$

La première inégalité vient du lemme 4.4.5, la seconde découle de l'inégalité triangulaire. La proposition 4.4.3 assure alors que  $g$  est loxodromique. ■

### 4.4.3 Isométries paraboliques.

Les isométries paraboliques peuvent être vu comme un cas « limite » entre elliptique et loxodromique. On peut illustrer cette idée dans le plan hyperbolique. On rappelle que le demi-plan de Poincaré est l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

On peut aussi le voir comme l'ensemble des nombres complexes  $z \in \mathbf{C}$  de partie imaginaire strictement positive. Le groupe  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  agit par isométries sur  $\mathbf{H}$  de la manière suivante. Si  $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  est représenté par la matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors  $gz$  est le point représenté par le nombre complexe

$$gz = \frac{az + b}{cz + d}$$

L'isométrie  $g$  est alors elliptique (respectivement parabolique, loxodromique) si et seulement si  $\mathrm{tr}(g) > 2$  (respectivement  $\mathrm{tr}(g) = 2$ ,  $\mathrm{tr}(g) < 2$ ).

Considérons maintenant un groupe hyperbolique  $G$  engendré par une partie finie  $S$ . Il agit par isométrie sur son graphe de Cayley qui est par définition un espace hyperbolique. En tant qu'isométries de  $\mathrm{Cay}(G, S)$ , les éléments de  $g$  sont priori elliptiques, paraboliques ou loxodromiques. En fait  $G$  ne contient pas d'isométries paraboliques. Plus précisément on va montrer le résultat suivant.

**Theorem 4.4.7** Soit  $X$  un espace métrique propre  $\delta$ -hyperbolique. Soit  $G$  un groupe agissant par isométries de manière proprement discontinue et co-compacte sur  $X$ . Les éléments de  $G$  sont

- elliptiques et d'ordre fini, ou
- loxodromiques et d'ordre infini.

La preuve du théorème repose sur le lemme technique suivant

**Lemma 4.4.8** Soit  $x \in X$ . Soient  $g$  et  $h$  deux isométries de  $X$  qui ne sont pas loxodromiques. Si

$$\langle gx, hx \rangle_x < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - 2\delta.$$

alors  $gh$  est loxodromique.

**Todo.** Faire un dessin !

*Démonstration.* Posons  $u = gh$ . On va utiliser le critère de la proposition 4.4.3 et montrer que l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\langle u \rangle$  un plongement quasi-isométrique de  $\mathbf{Z}$  dans  $X$ . Pour cela on définit une suite de point  $(x_n)$  de la manière suivante. Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ ,

$$x_{2k} = u^k x \quad \text{et} \quad x_{2k+1} = u^k gx.$$

Ainsi l'application orbite  $\mathbf{Z} \rightarrow X$  envoie  $k$  sur  $x_{2k}$ . Il suffit donc de montrer qu'il existe  $a, b > 0$  tels que pour tout  $p, q \in \mathbf{Z}$  on a

$$a|p - q| \leq d(x_p, x_q) \leq b|p - q|.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout  $p, q \in \mathbf{Z}$ ,

$$d(x_p, x_q) \leq |p - q| \max \{d(gx, x), d(hx, x)\}.$$

On peut donc choisir  $b = \max \{d(gx, x), d(hx, x)\}$ . Pour minorer la distance  $d(x_p, x_q)$ , on va exploiter le lemme 4.4.5. Remarquons pour commencer que pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on a

$$\min \{d(x_k, x_{k-1}), d(x_k, x_{k+1})\} = \min \{d(gx, x), d(hx, x)\}.$$

Par ailleurs

$$\langle x_{k-1}, x_{k+1} \rangle_{x_k} = \begin{cases} \langle g^{-1}x, hx \rangle_x & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \langle h^{-1}x, gx \rangle_x & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il nous faut donc majorer  $\langle g^{-1}x, hx \rangle_x$  et  $\langle h^{-1}x, gx \rangle_x$  en fonction de  $d(gx, x)$  et  $d(hx, x)$ . En combinant l'inégalité à quatre point (3.1) avec notre hypothèse on remarque que

$$\min \{ \langle gx, g^{-1}x \rangle_x, \langle g^{-1}x, hx \rangle_x \} \leq \langle gx, hx \rangle_x + \delta < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - \delta. \quad (4.5)$$

Notons que le minimum ne peut pas être atteint par  $\langle gx, g^{-1}x \rangle_x$ . En effet sinon on aurait

$$\langle gx, g^{-1}x \rangle_x < \frac{1}{2} d(gx, x) - \delta,$$

ce qui d'après la proposition 4.4.6 contredit le fait que  $g$  n'est pas loxodromique. Le minimum dans (4.5) est donc atteint par  $\langle g^{-1}x, hx \rangle_x$ , ce qui se réécrit

$$\langle g^{-1}x, hx \rangle_x < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - \delta.$$

De la même façon, on observe que

$$\langle h^{-1}x, gx \rangle_x < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - \delta.$$

On a donc démontrer qu'il existe  $a \in \mathbf{R}_+^*$  tel que que pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on a

$$\langle x_{k-1}, x_{k+1} \rangle_{x_k} < \frac{1}{2} \min \{d(x_k, x_{k-1}), d(x_k, x_{k+1})\} - a - \delta.$$

Il découle du lemme 4.4.5 que pour tout  $p, q \in \mathbf{Z}$ , on a  $d(x_p, x_q) \geq 2a|p - q|$ , ce qui termine la preuve. ■

**Proposition 4.4.9** Soit  $X$  un espace métrique propre  $\delta$ -hyperbolique. Soit  $G$  un groupe agissant par isométries de manière proprement discontinue et co-compacte sur  $X$ . Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Si les orbites de  $H$  ne sont pas bornées alors  $H$  contient un élément loxodromique.

*Démonstration.* On commence par démontrer le fait suivant. Il existe  $K \in \mathbf{N}$  ayant la propriété suivantes : pour tout  $x \in X$ , l'ensemble

$$S(x) = \{g \in G : d(gx, x) \leq 200\delta\}$$

contient au plus  $N$  élément. Fixons un point base  $x_0 \in X$ . Puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est co-compacte, il existe un rayon  $r \in \mathbf{R}_+$  de sorte que  $G \cdot B(x_0, r)$  couvre  $X$ . Autrement dit tout point de  $X$  est à distance a plus  $r$  d'un point de l'orbite de  $x_0$ . Par ailleurs l'action de  $G$  sur  $X$  est co-compacte. Aussi l'ensemble

$$U = \{g \in G : gB(x_0, r + 200\delta) \cap B(x_0, r + 200\delta) \neq \emptyset\}$$

est fini. Notons  $K$  son cardinal. Prenons maintenant un point  $x \in X$ . Par définition de  $r$ , il existe  $h \in G$  tel que  $d(x, hx_0) \leq r$ . Aussi pour tout  $g \in S(x)$  l'inégalité triangulaire entraine

$$d(h^{-1}ghx_0, x_0) = d(ghx_0, hx_0) \leq d(ghx_0, gx) + d(gx, x) + d(x, hx_0) \leq 2r + 100\delta.$$

Autrement dit  $h^{-1}gh$  est un élément de  $U$ . Ainsi la conjugaison par  $h$  envoie  $S(x)$  dans un sous-ensemble de  $U$ . Donc  $S(x)$  contient au plus  $K$  élément, ce qui démontre le fait avancé.

Montrons maintenant que  $H$  contient un élément loxodromique. La preuve se fait par l'absurde. On suppose donc que tous les éléments de  $H$  sont elliptique ou parabolique. On fixe un point  $x \in X$ . Pour tout  $h \in H$ , on note  $y_h$  le milieu de  $[x, hx]$ . On va montrer que qu'il existe des éléments  $h \in H$  tel que le cardinal de  $S(y_h)$  est arbitrairement grand, ce qui contredira l'observation précédente. Pour cela on se donne deux éléments  $h, u \in H$  tels que  $d(hx, x) > 3d(ux, x)$ . On affirme pour commencer que

$$|d(hx, x) - d(hux, x)| \leq 4\delta.$$

Il découle de notre hypothèse que  $d(hux, x) \geq d(ux, x)$ . Observons maintenant que que

$$\langle hx, x \rangle_{hux} = \langle u^{-1}x, u^{-1}h^{-1}x \rangle_x \geq \frac{1}{2} \min \{d(u^{-1}h^{-1}x, x), d(u^{-1}x, x)\} - 2\delta = \frac{1}{2}d(hux, hx) - 2\delta.$$

En effet si tel n'était pas le cas, le lemme 4.4.8 nous dirait que  $u^{-2}h^{-1}$  est loxodromique, ce qui contredit notre hypothèse. En développant le produit de Gromov  $\langle hx, x \rangle_{hux}$  dans l'inégalité précédente, il vient

$$d(hux, x) \geq d(hx, x) - 4\delta.$$

Le même raisonnement nous dit que

$$\langle hux, x \rangle_{hx} \geq \frac{1}{2} d(hux, hx) - 2\delta.$$

Ce qui entraîne, développant le produit de Gromov,

$$d(hux, x) \geq d(hx, x) - 4\delta.$$

Ainsi  $d(hx, x)$  et  $d(hux, x)$  diffèrent d'au plus  $4\delta$  comme annoncé. Rappelons que  $y_h$  et  $y_{hu}$  sont les milieux respectifs de  $[x, hx]$  et  $[x, hux]$ . Ainsi

$$|d(x, y_h) - d(x, y_{hu})| \leq 2\delta. \quad (4.6)$$

L'inégalité triangulaire combinée avec l'hypothèse  $d(hx, x) > 3d(ux, x)$  entraîne que

$$\langle hx, hux \rangle_x \geq \frac{1}{2} \min \{d(x, hx), d(x, hux)\} \geq \frac{1}{2} \min \{d(x, y_h), d(x, y_{hu})\}. \quad (4.7)$$

En combinant (4.6) et (4.7) avec l'inégalité (3.3) on observe que la distance entre les points  $y_h$  et  $y_{hu}$  est au plus  $6\delta$ . Puisque  $y_h$  et  $y_{hu}$  sont à distance les milieux de  $[x, hx]$  et  $[x, hux]$ , ces points sont dans le  $26\delta$ -voisinage de  $C_h$  et  $C_{hu}$  respectivement (corollaire 4.3.2). Par ailleurs puisque  $hu$  n'est loxodromique  $\|h\| \leq 8\delta$  et  $\|hu\| \leq 8\delta$  (lemme 4.1.1). Il découle alors de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} d(hy_h, y_h) &\leq \|h\| + 62\delta \leq 70\delta \\ d(huy_{hu}, y_{hu}) &\leq \|hu\| + 62\delta \leq 70\delta \end{aligned}$$

Autrement dit  $y_h$  (respectivement  $y_{hu}$ ) est presque fixé par  $h$  (respectivement  $hu$ ). Comme ces deux points sont proches  $y_h$  est presque fixé par  $hu$  et donc  $u$ . Formellement l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} d(uy_h, y_h) &= d(huy_h, hy_h) \leq d(huy_h, huy_{hu}) + d(huy_{hu}, y_{hu}) + d(y_{hu}, y_h) + d(y_h, hy_h) \\ &\leq 2d(y_h, y_{hu}) + d(huy_{hu}, y_{hu}) + d(y_h, hy_h). \end{aligned}$$

Lors de notre étude on a majoré chacun des termes de la dernière ligne en fonction de  $\delta$ . On obtient donc  $d(uy_h, y_h) \leq 152\delta$ . Autrement dit  $u$  appartient à  $S(y_h)$ .

On va maintenant utiliser le fait que les orbites de  $H$  sont non bornées. En particulier, on peut trouver une suite d'éléments deux à deux distincts  $(h_n)$  dans  $H$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $d(h_{n+1}x, x) > 3d(h_nx, x)$ . La discussion précédente montre que pour un entier  $n$  fixé, tous les éléments  $h_k$ , avec  $k \leq n$  appartiennent à  $S(y_{h_n})$ . En particulier le cardinal de  $S(y_{h_n})$  est au moins  $n$ . Cela contredit le fait que le cardinal de  $S(y)$  est bornée indépendamment du point  $y$ . Donc  $H$  contient un élément loxodromique. ■

On peut maintenant démontrer le théorème 4.4.7

*Démonstration du théorème 4.4.7.* Soit  $g \in G$ . Supposons d'abord que  $g$  est elliptique, c'est à dire que toute orbite de  $\langle g \rangle$  est bornée. En particulier il existe  $x \in X$  et  $R \geq 0$  tel que la suite  $(g^n x)$  est contenue dans  $B(x, R)$ . Comme l'action de  $G$  sur  $X$  est proprement discontinue la suite  $(g^n)$  prend deux fois la même valeur. Il en découle que  $g$  est d'ordre fini. Supposons maintenant que  $g$  n'est pas elliptique. En appliquant la proposition 4.4.9 au sous-groupe  $\langle g \rangle$  on montre qu'il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $g^n$  est loxodromique. En particulier  $g$  lui même est loxodromique (exercice 4.1) et donc d'ordre infini. ■

## 4.5 Problèmes et exercices



**Exercice 4.6** Soit  $G$  un groupe hyperbolique.

- (i) Montrer que à conjugaison près,  $G$  admet un nombre fini d'élément d'ordre fini.
- (ii) Plus généralement, montrer que à conjugaison près,  $G$  admet un nombre fini de sous-groupes finis.

**Exercice 4.7** Soit  $G$  un groupe hyperbolique et  $X$  son graphe de Cayley. Soit  $g$  un élément loxodromique de  $G$  et  $N(g)$  le normalisateur de  $\langle g \rangle$  dans  $G$ .

- (i) Montrer que pour tout  $u \in N(g)$ , on  $ugu^{-1} = g^{\pm 1}$  (on pourra comparer les longueurs de translation stable de  $g$  et  $ugu^{-1}$ ).
- (ii) Montrer que l'ensemble caractéristique  $C_g$  est invariant sous l'action de  $N(g)$ .
- (iii) On fixe un point  $x \in X$ . Montrer qu'il existe  $D \geq 0$  tel que pour tout  $u \in N(g)$  le point  $ux$  est à distance au plus  $D$  d'un point de  $\langle g \rangle \cdot x$  (on pourra s'inspirer de la preuve du corollaire 4.4.4).
- (iv) En déduire que  $\langle g \rangle$  est un sous-groupe d'indice fini de  $N(g)$ .

Plus généralement, on note  $E(g)$  l'ensemble

$$E(g) = \left\{ u \in G : \exists k \in \mathbf{N}, ugu^{-1} = g^{\pm k} \right\}$$

- (v) Montrer que  $E(g)$  est un sous-groupe  $G$ .
- (vi) Montrer que  $E(g)$  est l'ensemble des éléments  $u \in G$  tel que la distance de Hausdorff entre  $C_g$  et  $uC_g$  est bornée.
- (vii) Montrer que  $\langle g \rangle$  est un sous-groupe d'indice fini de  $E(g)$  (on pourra s'inspirer de l'étude précédente).

**Exercice 4.8** Soit  $G$  un groupe hyperbolique. Montrer que  $G$  ne peut pas contenir de sous-groupe isomorphe à  $\mathbf{Z}^2$  (on pourra utiliser l'exercice 4.7). Montrer que  $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$  est hyperbolique si et seulement si  $n = 2$ .

**Exercice 4.9** Soit  $G$  un groupe hyperbolique. On dit qu'un élément  $g \in G$  est *primitif* si  $g$  n'est pas une puissance propre d'un autre élément, autrement dit si pour tout  $u \in G$ , pour tout  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ , l'égalité  $g = u^n$  entrain  $n = 1$ . Montrer que tout élément d'ordre infini  $g \in G$  est une puissance d'un élément primitif (on pourra utiliser l'exercice 4.7).

#### 4.5.1 Sous-groupes d'un groupe hyperbolique.

L'objectif de ce problème est d'étudier les sous-groupes d'un groupe hyperbolique. Plus précisément on va montrer que le résultat suivant

**Theorem 4.5.1** Soit  $G$  un groupe hyperbolique. Tout sous-groupe  $H$  de  $G$  vérifie l'une des alternatives suivantes

- $H$  est fini,
- $H$  contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbf{Z}$ ,
- $H$  contient un sous-groupe isomorphe au groupe libre  $\mathbf{F}_2$ .

A partir de maintenant on fixe un groupe hyperbolique  $G$ . On se donne une partie génératrice finie  $S$  de  $G$ . L'espace  $X$  est le graphe de Cayley  $X = \mathrm{Cay}(G, S)$  qui est  $\delta$ -hyperbolique. On note  $x_0$  le sommet de  $X$  qui correspond à l'identité.

**Stabilité des quasi-géodésiques infinies.**

- (i) On fixe  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ . Montrer qu'il existe une constante  $D$  vérifiant la propriété suivante. Soient  $\gamma_1 : \mathbf{R}_+ \rightarrow X$  et  $\gamma_2 : \mathbf{R}_+ \rightarrow X$  deux  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésiques. Si la distance de Hausdorff entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est bornée, alors il existe  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}_+$  tel que la distance de Hausdorff entre  $\gamma_1|_{[t_1, \infty[}$  et  $\gamma_2|_{[t_2, \infty[}$  est au plus  $D$  (on pourra s'inspirer de la preuve du Corollaire 5.17 dans le cours).

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) : étant données  $\gamma_1 : \mathbf{R} \rightarrow X$  et  $\gamma_2 : \mathbf{R} \rightarrow X$  deux  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésiques bi-infinies, si la distance de Hausdorff entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est finie alors elle est en fait inférieure à  $D$ .

**Isométries préservant un axe.**

On commence par étudier une isométrie loxodromique  $g \in G$ . On se donne une géodésique  $\gamma : [0, T] \rightarrow X$  entre  $x_0$  et  $gx_0$ . On étend  $\gamma$  en un chemin bi-infini  $g$ -invariant  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow X$  en posant

$$\gamma(t + nT) = g^n \gamma(t),$$

pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  et  $t \in [0, T[$ . Puisque  $g$  est loxodromique, on sait qu'il existe  $\kappa \geq 1$  et  $\ell \geq 0$  tels que  $\gamma$  est une  $(\kappa, \ell)$ -quasi-géodésique.

- (ii) Soit  $u \in G$ . Décrire l'action de  $ugu^{-1}$  sur la quasi-géodésique  $u\gamma$ .

On note  $E(g)$  l'ensemble des éléments  $u \in G$  tel que la distance de Hausdorff entre  $\gamma$  et  $u\gamma$  est finie.

- (iii) Montrer que  $E(g)$  est un sous-groupe de  $G$ .  
 (iv) Montrer qu'il existe  $C_1 > 0$ , tel que pour tout  $u \in E(g)$  il existe  $n \in \mathbf{Z}$  vérifiant  $d(ux_0, g^n x_0) \leq C_1$ .  
 (v) En déduire que  $\langle g \rangle$  est un sous-groupe d'indice fini de  $E(g)$ .  
 (vi) Soit  $u \in G$ . On suppose qu'il existe  $n \in \mathbf{Z}^*$  et  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ , tels que  $ug^n u^{-1} = g^{\varepsilon n}$ . Montrer que  $u$  appartient à  $E(g)$ . On pourra montrer que pour tout  $k \in \mathbf{Z}$  on a

$$d\left(ug^{kn}x_0, g^{\varepsilon kn}x_0\right) \leq d(ux_0, x_0)$$

Notons  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  les restrictions de  $\gamma$  à  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$  respectivement. Dans les questions qui suivent,  $u$  est un élément de  $G$  tel que la distance de Hausdorff entre  $u\gamma_+$  et  $\gamma_+$  est finie.

- (vii) Montrer qu'il existe  $C_2 > 0$  ainsi qu'un point  $y$  sur  $\gamma_+$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a

$$d\left(ug^n u^{-1}y, g^n y\right) \leq C_2,$$

(on pourra utiliser la question 1).

- (viii) En déduire  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  tel que  $ug^n u^{-1} = g^n$ , puis que  $u$  appartient à  $E(g)$ .

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) : si la distance de Hausdorff entre  $u\gamma_-$  et  $\gamma_-$  (respectivement  $u\gamma_+$  et  $\gamma_+$ ,  $u\gamma_-$  et  $\gamma_+$ ) est finie, alors  $u$  appartient à  $E(g)$ .

**Sous-groupes de  $G$ .**

A partir de maintenant on se donne un sous-groupe  $H$  de  $G$ .

- (ix) Montrer que si l'orbite  $Hx_0$  est bornée alors  $H$  est fini.

Supposons maintenant que l'orbite  $Hx_0$  n'est pas bornée. Par ailleurs on suppose que  $H$  ne contient pas de sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbf{Z}$ .

- (x) Montrer qu'il existe un élément loxodromique  $h \in H$  et  $u \in H$  tel que  $u$  n'appartient pas à  $E(h)$ .  
 (xi) En déduire que la distance de Hausdorff entre  $u\gamma_+$  et  $\gamma_+$  est infinie.

(xii) Montrer qu'il existe  $C_3 > 0$ , tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\langle uh^n u^{-1} x_0, h^n x_0 \rangle_{x_0} \leq C_3,$$

(on pourra raisonner par l'absurde et montrer que dans le cas contraire la distance de Hausdorff entre  $u\gamma_+$  et  $\gamma_+$  est finie).

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) il existe  $C_3 > 0$ , tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\langle uh^{\pm n} u^{-1} x_0, h^{\pm n} x_0 \rangle_{x_0} \leq C_3,$$

(xiii) Montrer qu'il existe  $n \in \mathbf{N}$ , tel que

$$\langle uh^{\pm n} u^{-1} x_0, h^{\pm n} x_0 \rangle_{x_0} \leq \frac{1}{2} \min \{ d(uh^n u^{-1} x_0, x_0), d(h^n x_0, x_0) \} - 100\delta.$$

(xiv) En déduire que, quitte à augmenter la valeur de  $n$ , les éléments  $h^n$  et  $uh^n u^{-1}$  engendrent un groupe libre (on pourra utiliser le critère énoncé dans le lemme 5.18 du cours pour montrer qu'aucun mot réduit en les lettres  $a = h^n$  et  $b = uh^n u^{-1}$  et leurs inverses ne représente l'élément neutre).

(xv) Conclure.



## 5. Le bord à l'infini d'un espace hyperbolique

Étant donné un espace hyperbolique  $X$  propre on peut lui associer un *bord à l'infini*  $\partial X$  de sorte que la réunion  $X \cup \partial X$  est un espace topologique compacte et  $X$  est dense dans  $\bar{X}$ . Pour une définition précise du bord à l'infini  $\partial X$  de  $X$  on renvoie à [CooDelPap90] ou [Ghys:1990ki]. Si  $g$  est une isométrie de  $X$ , son action sur  $X$  induit un homeomorphisme de  $\partial X$ . On peut alors caractériser les isométries de  $X$  (elliptique, parabolique, loxodromique) grâce aux propriétés dynamiques de l'action de  $g$  sur  $X \cup \partial X$  :

- (i)  $g$  est elliptique si et seulement si ses orbites dans  $X$  sont bornées (c'est la définition !)
- (ii)  $g$  est parabolique si et seulement si l'orbite d'un point  $x \in X$  admet un unique point d'accumulation dans  $\partial X$ .
- (iii)  $g$  est loxodromique si et seulement si l'orbite d'un point  $x \in X$  admet exactement deux points d'accumulation dans  $\partial X$ .

On pourra consulter [CooDelPap90] et [Ghys:1990ki].