Théorie géométrique des groupes

Devoir maison 2

5 mars 2018

1 Sous-groupes d'un groupe hyperbolique.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les sous-groupes d'un groupe hyperbolique. Plus précisément on va montrer que si G est un groupe hyperbolique alors tout sous-groupe H de G vérifie l'une des alternatives suivantes

- H est fini,
- H contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$,
- H contient un sous-groupe isomorphe au groupe libre $\mathbf{F}_2$.

A partir de maintenant on fixe un groupe hyperbolique G. On se donne une partie génératrice finie S de G. L'espace X est le graphe de Cayley $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ qui est δ-hyperbolique. On note x_0 le sommet de X qui correspond à l'identité.

Stabilité des quasi-géodésiques infinies.

1. On fixe $\kappa \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une constante D vérifiant la propriété suivante. Soient $\gamma_1 \colon \mathbb{R}_+ \to X$ et $\gamma_2 \colon \mathbb{R}_+ \to X$ deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques. Si la distance de Hausdorff entre γ_1 et γ_2 est bornée, alors il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que la distance de Hausdorff entre ${\gamma_1}_{|[t_1,\infty[}$ et ${\gamma_2}_{|[t_2,\infty[}$ est au plus D (on pourra s'inspirer de la preuve du Corollaire 5.17 dans le cours).

Solution. On note $D_o = D_o(\kappa, \ell, \delta)$ la constante donnée par la stabilité des quasi-géodésiques. Supposons que la distance de Hausdorff entre γ_1 et γ_2 est majorée par C. On va commencer par montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$d(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2)) \leqslant 2D_o + 10\delta.$$

Pour cela on fixe $r_1, t_1, s_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$r_1 = 0, \quad t_1 > \kappa\,(C + D_o + \ell + 9\delta) \quad \text{et} \quad s_1 - t_1 > \kappa\,(C + D_o + \ell + 9\delta)$$

Pour simplifier les notations on posera $x_1 = \gamma_1(r_1)$ et $y_1 = \gamma_1(s_1)$. Notons $x_2 = \gamma_2(r_2)$ et $y_2 = \gamma_2(s_2)$ des δ-projection de x_1 et y_1 sur γ_1. D'après la stabilité des quasi-géodésique appliquée à γ_1, le point $\gamma(t_1)$ est dans le D_o-voisinage de la géodésique $[x_1, y_1]$. Puisque que les triangles de X sont 4δ-étroit, cette dernière est dans le 8δ voisinage de $[x_1, x_2] \cup [x_2, y_2] \cup [y_2, x_2]$. En particular $\gamma_1(t_1)$ est $(D_o + 8\delta)$-proche de l'une des géodésiques $[x_1, x_2]$, $[x_2, y_2]$ ou $[y_2, y_1]$. En fait $\gamma_1(t_1)$ ne peut pas être $(D_o+8\delta)$-proche de $[x_1, x_2]$. En effet si tel était le cas, l'inégalité triangulaire entrainerait que

$$d(\gamma_1(0), \gamma(t_1)) \leqslant d(x_1, x_2) + D_o + 8\delta$$

Comme x_2 est une δ-projection de x_1 sur γ_2, on a $d(x_1, x_2) \leqslant C + \delta$. Ainsi

$$\kappa^{-1} t_1 - \ell \leqslant d(\gamma_1(0), \gamma(t_1)) \leqslant C + D_o + 9\delta,$$

ce qui contredit la définition de t_1. De la même manière on montre que $\gamma_1(t_1)$ ne peut être $(D_o+8\delta)$-proche de $[y_1, y_2]$. Aussi $\gamma(t_1)$ est $(D_o+8\delta)$-proche de $[x_2, y_2]$. La stabilité des quasi-géodésiques appliquées à γ_2 nous dit que $[x_2, y_2]$ est dans le D_o voisinage de γ_2. Aussi $d(\gamma(t_1), \gamma_2) \leqslant 2D_o + 8\delta$, d'où le résultat annoncé.

Pour éviter la confusion on va noter $\nu_1 \colon [t_1, \infty[\to X$ et $\nu_2 \colon [t_2, \infty[\to X$ les chemins γ_1 et γ_2 restreints à $[t_1, \infty[$ et $[t_2, \infty[$ respectivement. Ainsi

$$d(\nu_1(t_1), \nu_2(t_2)) \leqslant 2D_o + 10\delta.$$

On va maintenant montrer que la distance de Haussdorff entre ν_1 et ν_2 est au plus $D = 3D_o + 18\delta$. Pour commencer, on observe que tout point de γ_i est à distance au plus $\kappa t_i + \ell$ d'un point de ν_i. Par conséquent la distance de Hausdorff entre ν_1 et ν_2 est majorée par

$$C' = C + \kappa \max\{t_1, t_2\} + \ell.$$

Soit $t \in [t_1, \infty[$. On fixe un paramètre $s_1 \in [t_1, \infty[$ tel que

$$s_1 - t > \kappa\left(C' + D_o + \ell + 9\delta\right).$$

Notons $\nu_2(s_2)$ une δ-projection de $\nu_1(s)$ sur ν_2. On raisonne alors comme précédemment. On commence par observer que $\nu_1(t)$ est dans le $(D_o + 8\delta)$-voisinage de

$$[\nu_1(t_1), \nu_2(t_2)] \cup [\nu_2(t_2), \nu_2(s_2)] \cup [\nu_2(s_2), \nu_1(s_1)]$$

Ensuite on montre (avec le même argument qu'avant) que $\nu_1(t)$ ne peut en fait par être dans le $(D_o + 8\delta)$-voisinage de $[\nu_2(s_2), \nu_1(s_1)]$. On distingue alors deux cas.

Cas 1. Supposons que $\nu_1(t)$ est dans de le $(D_o + 8\delta)$-voisinage de $[\nu_1(t_1), \nu_2(t_2)]$. Il découle alors de l'inégalité triangulaire que

$$d(\nu_1(t), \nu_2(t_2)) \leqslant d(\nu_1(t_1), \nu_2(t_2)) + D_o + 8\delta \leqslant 3D_o + 18\delta.$$

En particulier le point $\nu_1(t)$ est dans le $(3D_o + 18\delta)$-voisinage de ν_2.

Cas 2. Supposons que $\nu_1(t)$ est dans de le $(D_o + 8\delta)$-voisinage de $[\nu_2(t_2), \nu_2(s_2)]$. On a applique comme précédemment la stabilité des quasi-géodésique ν_2 pour montrer que $\nu_1(t)$ est dans le $(2D_o + 8\delta)$-voisinage de ν_2.

Dans les deux cas $d(\nu_1(t), \nu_2) \leqslant D$. Durant la preuve on a juste utilisé le fait que la distance de Hausdorff entre ν_1 et ν_2 est fini et que $d(\nu_1(t_1), \nu_2(t_2)) \leqslant 2D_o + 10\delta$, de sorte que ν_1 et ν_2 jouent un rôle parfaitement symétrique. Par conséquence ν_2 est aussi dans le D-voisinage de ν_1. Autrement dit la distance de Hausdorff entre ν_1 et ν_2 est au plus D. On observera que $D = 3D_o + 18\delta$, ne dépend ni de γ_1 ni de γ_2, ce qui termine la démonstration.

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) : étant données $\gamma_1 \colon \mathbb{R} \to X$ et $\gamma_2 \colon \mathbb{R} \to X$ deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques bi-infinies, si la distance de Hausdorff entre γ_1 et γ_2 est finie alors elle est en fait inférieure à D.

Isométries préservant un axe. On commence par étudier une isomérie loxodromique $g \in G$. On se donne une géodésique $\gamma \colon [0\,, T] \to X$ entre x_0 et gx_0. On étend γ en un chemin bi-infini g-invariant $\gamma \colon \mathbb{R} \to X$ en posant

$$\gamma(t + nT) = g^n\gamma(t),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0, T[$. Puisque g est loxodromique, on sait qu'il existe $\kappa \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$ tels que γ est une (κ, ℓ)-quasi-géodésique.

2. Soit $u \in G$. Décrire l'action de ugu^{-1} sur la quasi-géodésique $u\gamma$.

Solution. L'élément ugu^{-1} agit par « translation » sur $u\gamma$. En effet pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$(ugu^{-1})u\gamma(t) = ug\gamma(t) = u\gamma(t + T).$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(ugu^{-1})^n u\gamma(t) = u\gamma(t+nT)$.

On note $E(g)$ l'ensemble des éléments $u \in G$ tel que la distance de Hausdorff entre γ et $u\gamma$ est finie.

3. Montrer que $E(g)$ est un sous-groupe de G.

Solution. L'élément neutre laisse γ invariant aussi il appartient à $E(g)$. L'action de G sur X induite une action par isométries (pour la distance de Hausdorff) sur les parties de X. Par conséquent si $u \in E(g)$, on a

$$d_{\text{Hausdorff}}\left(u^{-1}\gamma, \gamma\right) = d_{\text{Hausdorff}}\left(\gamma, u\gamma\right) < \infty.$$

Donc u^{-1} appartient à $E(g)$. De même si u_1 et u_2 sont des éléments de $E(g)$, l'inégalité triangulaire entraine

$$\begin{aligned} d_{\text{Hausdorff}}\left(u_1 u_2 \gamma, \gamma\right) &\leqslant d_{\text{Hausdorff}}\left(u_1 u_2 \gamma, u_1 \gamma\right) + d_{\text{Hausdorff}}\left(u_1 \gamma, \gamma\right) \\ &\leqslant d_{\text{Hausdorff}}\left(u_2 \gamma, \gamma\right) + d_{\text{Hausdorff}}\left(u_1 \gamma, \gamma\right) < \infty. \end{aligned}$$

Donc $u_1 u_2 \in E(g)$.

4. Montrer qu'il existe $C_1 > 0$, tel que pour tout $u \in E(g)$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $d(ux_0, g^n x_0) \leqslant C_1$.

Solution. D'après la question 1 (ou plus précisément la remarque qui suit cette question) on sait qu'il exists $D \geqslant 0$ tel que pour tout $u \in E(g)$ a distance de Hausdorff entre γ et $u\gamma$ est au plus D. Soit $u \in E(g)$. Aussi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $d(ux_0, \gamma(t)) \leqslant D + \delta$. En utilisant la division euclidienne on écrit $t = nT + r$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, T[$. Puisque g agit par translation sur γ on a

$$\gamma(t) = g^n \gamma(r).$$

Aussi

$$d(\gamma(t), g^n x_0) = d(g^n \gamma(r), g^n \gamma(0)) = d(\gamma(r), \gamma(0)) \leqslant \kappa T + \ell.$$

Combiné avec l'observation précédente et l'inégalité triangulaire, il vient

$$d(ux_0, g^n x_0) \leqslant d(ux_0, \gamma(t)) + d(\gamma(t), g^n x_0) \leqslant C_1.$$

où $C_1 = D + \delta + \kappa T + \ell$. On notera que cette constante C_1 ne dépend pas de u, ce qui termine la preuve.

5. En déduire que $\langle g \rangle$ est un sous-groupe d'indice fini de $E(g)$.

Solution. On observe pour commencer que la distance de Hausdorff entre $g\gamma$ et γ est nulle. Aussi $\langle g \rangle$ est bien un sous-groupe de $E(g)$. On note C_1 la constante de la question précédente. Puisque l'action de G sur X est propre, l'ensemble

$$A_1 = \{a \in G \mid d(ax_0, x_0) \leqslant C_1\}$$

est fini. Or la question précédent se reformule de la manière suivante : pour tout $u \in E(g)$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g^{-n}u \in A_1$. Par conséquent $E(g)$ est l'union disjointe des classes à gauche $\langle g \rangle a$ où $a \in A_1 \cap E(g)$. Donc $\langle g \rangle$ est un sous-groupe d'indice fini de $E(g)$.

6. Soit $u \in G$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{Z}^*$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, tels que $ug^n u^{-1} = g^{\varepsilon n}$. Montrer que u appartient à $E(g)$. On pourra montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$d\Big(ug^{kn}x_0, g^{\varepsilon kn}x_0\Big) \leqslant d(ux_0, x_0)$$

Solution. Soit $k \in \mathbb{Z}$. D'après notre hypothèse $ug^{kn} = g^{\varepsilon kn}u$. Aussi

$$d\Big(ug^{kn}x_0, g^{\varepsilon kn}x_0\Big) = d\Big(g^{\varepsilon kn}ux_0, g^{\varepsilon kn}x_0\Big) = d(ux_0, x_0)$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant la division euclidienne on écrit $t = knT + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, nT[$. Puisque g agit par translation sur γ on a

$$u\gamma(t) = ug^{kn}\gamma(t).$$

Par conséquent

$$d\Big(u\gamma(t), ug^{kn}x_0\Big) = d(\gamma(t), \gamma(0)) \leqslant \kappa nT + \ell.$$

L'inégalité triangulaire entraine alors

$$\begin{aligned} d\Big(u\gamma(t), g^{\varepsilon kn}x_0\Big) &\leqslant d\Big(u\gamma(t), ug^{kn}x_0\Big) + d\Big(ug^{kn}x_0, g^{\varepsilon kn}x_0\Big) \\ &\leqslant d(ux_0, x_0) + \kappa nT + \ell. \end{aligned}$$

Autrement dit $u\gamma$ est dans le R-voisinage de γ où $R = d(ux_0, x_0) + \kappa nT + \ell$. Par symétrie on obtient l'inclusion inverse. Ainsi la distance de Hausdorff entre $u\gamma$ et γ est majorée par R, donc $u \in E(g)$.

Notons γ_- et γ_+ les restrictions de γ à $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement. Dans les questions qui suivent, u est un élément de G tel que la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ est finie.

7. Montrer qu'il existe $C_2 > 0$ ainsi qu'un point y sur γ_+ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$d\big(ug^n u^{-1} y, g^n y\big) \leqslant C_2,$$
(on pourra utiliser la question 1).

Solution. On note $D = D(\kappa, \ell, \delta)$ la constante donnée par la question 1. Par ailleurs, on appelle $D_o = D_o(\kappa, \ell, \delta)$ la constante donnée par la stabilité des quasi-géodésiques. Puisque la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ est bornée, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ restreint à $[t_1, \infty[$ et $[t_2, \infty[$ respectivement est au plus D. Comme on l'a vu dans la preuve de la question 1, on peut aussi supposer que $d(u\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leqslant D$. On prendra à la fin de preuve $y = \gamma(t_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On fixe $s_1 \in [t_1, \infty[$ tel que
$$s_1 - t_1 \geqslant \kappa^2 nT + \kappa(2\ell + D + \delta).$$
En particulier $s_1 - t_1 \geqslant nT$. On note $\gamma(s_2)$ une δ-projection de $u\gamma(s_1)$ sur γ. En raisonnant comme dans la question 1, on montre que $u\gamma(t_1 + nT)$ est à une distance au plus $(D + D_o + 8\delta)$ de la géodésique $[\gamma(t_2), \gamma(s_2)]$.

On affirme maintenant que $\gamma(t_2 + nT)$ est situé sur γ « entre $\gamma(t_2)$ et $\gamma(s_2)$ ». On observe pour commencer que
$$d(u\gamma(t_1), u\gamma(s_1)) \geqslant \kappa^{-1}(s_1 - t_1) - \ell.$$
Aussi d'après l'inégalité triangulaire
$$\begin{aligned} d(\gamma(t_2), \gamma(s_2)) &\geqslant \kappa^{-1}(s_1 - t_1) - \ell - d(\gamma(t_2), u\gamma(t_1)) - d(\gamma(s_2), u\gamma(s_1)) \\ &\geqslant \kappa^{-1}(s_1 - t_1) - \ell - 2D - \delta. \end{aligned}$$
Par conséquent, il découle de notre choix de t_1 que
$$s_2 - t_2 \geqslant \kappa^{-1}\left[d(\gamma(t_2), \gamma(s_2)) - \ell\right] \geqslant nT.$$
Ainsi $t_2 + nT$ est entre t_2 et s_2. Il découle de la stabilité des quasi-gédoésique que $\gamma(t_2 + nT)$ et à distance au plus D_o de la géodésique $[\gamma(t_2), \gamma(s_2)]$.

Notons enfin (grâce à l'inégalité triangulaire) que
$$\begin{aligned} &|d(\gamma(t_2), \gamma(t_2 + nT)) - d(\gamma(t_2), u\gamma(t_1 + nT))| \\ &\quad \leqslant |d(\gamma(t_2), \gamma(t_2 + nT)) - d(u\gamma(t_1), u\gamma(t_1 + nT))| + d(\gamma(t_2), u\gamma(t_1)) \\ &\quad \leqslant |d(\gamma(t_2), g^n\gamma(t_2)) - d(\gamma(t_1), g^n\gamma(t_1))| + D \\ &\quad \leqslant 2d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) + D \end{aligned}$$

Remarque. La dernière estimation est absolument catastrophique (on peut faire beaucoup mieux) mais amplement suffisante pour les besoins de cette question.

On a montré que $u\gamma(t_1 + nT)$ et $\gamma(t_2 + nT)$ sont tous les deux proches de $[\gamma(t_2), \gamma(s_2)]$ et presque à la même distance de $\gamma(t_2)$. Il en découle que

$$d(u\gamma(t_1 + nT), \gamma(t_2 + nT)) \leqslant 2d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) + 3D + 4D_o + 16\delta.$$

C'est à dire

$$d(ug^n\gamma(t_1), g^n\gamma(t_2)) \leqslant 2d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) + 3D + 4D_o + 16\delta.$$

On se rappelle pour terminer que $\gamma(t_2)$ est à distance au plus D de $u\gamma(t_1)$. Ainsi l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} d\big(ug^nu^{-1}\gamma(t_2), g^n\gamma(t_2)\big) &\leqslant d(ug^n\gamma(t_1), g^n\gamma(t_2)) + d(u\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \\ &\leqslant 2d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) + 4D + 4D_o + 16\delta. \end{aligned}$$

On pose $y = \gamma(t_2)$. On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d\big(ug^nu^{-1}y, g^ny\big) \leqslant C_2,$$

où $C_2 = 2d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) + 4D + 4D_o + 16\delta$.

8. En déduire $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $ug^nu^{-1} = g^n$, puis que u appartient à $E(g)$.

Solution. Puisque l'action de G sur X est propre l'ensemble

$$A_2 = \{a \in G \mid d(ay, y) \leqslant C_2\}$$

est fini. La question précédente nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $g^{-n}ug^nu^{-1}$ est dans A_2. Par conséquent il existe deux entiers distincts $p, q \in \mathbb{N}$ tels que

$$g^{-p}ug^pu^{-1} = g^{-q}ug^qu^{-1}.$$

Quitte à inverser p et q on peut suppose que $q > p$. Il vient alors $ug^nu^{-1} = g^n$, où $n = q - p$. Il découle alors de la question 6 que $u \in E(g)$.

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) : si la distance de Hausdorff entre $u\gamma_-$ et γ_- (respectivement $u\gamma_+$ et γ_-, $u\gamma_-$ et γ_+) est finie, alors u appartient à $E(g)$.

Sous-groupes de G. A partir de maintenant on se donne un sous-groupe H de G.

9. Montrer que si l'orbite Hx_0 est bornée alors H est fini.

> **Solution.** On note R le diamètre de l'orbite Hx_0. Puisque l'action de G sur X est propre l'ensemble
> $$A_3 = \{a \in G \mid d(ax_0, x_0) \leqslant R\}$$
> est fini. Par définition de R, le sous-groupe H est entièrement contenu dans A_3. Il est donc fini.

Supposons maintenant que l'orbite Hx_0 n'est pas bornée. Par ailleurs on suppose que H ne contient pas de sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$.

10. Montrer qu'il existe un élément loxodromique $h \in H$ et $u \in H$ tel que u n'appartient pas à $E(h)$.

> **Solution.** L'action de G sur X est propre et co-compacte. On a vu en cours qu'un sous-groupe de G soit a une orbite bornée, soit contient un élément loxodromique. Puisque l'orbite de H n'est pas bornée, H contient un élément loxodromique que l'on notera h. On sait par ailleurs que $E(h)$ contient $\langle h \rangle$ comme sous-groupe d'indice fini. Puisque H ne contient pas de sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$, il ne peut être contenu dans $E(h)$. Aussi il existe $u \in H \setminus E(h)$.
>
> **Rermarque.** C'est la première fois qu'on utilise le fait (crucial) que l'action de G sur X est co-compacte.

11. En déduire que la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ est infinie ($\gamma \colon \mathbb{R} \to X$ est une (κ, ℓ)-quasi-géodésique construite à partir de h comme dans les questions 2-8).

> **Solution.** C'est une conséquence directe des questions 7 et 8. Si la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ était fini alors u serait un élément de $E(h)$, ce qui n'est pas.

12. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left\langle uh^n u^{-1} x_0, h^n x_0 \right\rangle_{x_0} \leqslant C_3,$$
(on pourra raisonner par l'absurde et montrer que dans le cas contraire la distance de Hausdorff entre est $u\gamma_+$ et γ_+ est finie).

Solution. On note $D_o = D_o(\kappa, \ell, \delta)$ la constante donnée par la stabilité des quasi-géodésiques. Procédons par l'absurde. On suppose donc que pour tout $L \geqslant 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\langle u\gamma(nT), \gamma(nT)\rangle_{x_0} = \left\langle uh^n u^{-1} x_0, h^n x_0\right\rangle_{x_0} \geqslant L.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Vu notre hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\langle u\gamma(nT), \gamma(nT)\rangle_{x_0} \geqslant \max\left\{\kappa^2 d(x_0, \gamma(t)) + (\kappa+1)\ell, d(x_0, \gamma(t)) + D_o\right\}$$

On se rappelle que $d(x_0, \gamma(nT)) \geqslant \langle u\gamma(nT), \gamma(nT)\rangle_{x_0}$. En utilisant le fait que γ est un (κ, ℓ)-quasi-géodésique on obtient

$$\kappa nT + \ell \geqslant d(x_0, \gamma(nT)) \geqslant \kappa^2 d(x_0, \gamma(t)) + (\kappa+1)\ell \geqslant \kappa t + \ \ell$$

Ainsi $nT \geqslant t$. Autrement dit $\gamma(t)$ est positionné sur γ « entre $\gamma(0)$ et $\gamma(nT)$ ». En appliquant la stabilité des quasi-géodésiques à γ on voit donc que $\gamma(t)$ est à distance au plus D_o d'un point p sur $[x_0, \gamma(nT)]$. Il découle de notre choix de n que $d(x_0, p) \leqslant \langle u\gamma(nT), \gamma(nT)\rangle_{x_0}$. En utilisant le fait que les triangles de X sont 4δ-étroit – voir la formule (4) dans le cours – on obtient que p est à distance au plus 4δ d'un point de $[x_0, u\gamma(nT)]$. Par ailleurs $[x_0, u\gamma(nT)]$ est contenu dans le 4δ-voisinage de $[x_0, ux_0] \cup [u\gamma(0), u\gamma(nT)]$. Par conséquent,

$$d(\gamma(t), u\gamma_+) \leqslant d(\gamma(t), p) + d(p, [u\gamma(0), u\gamma(nT)]) \leqslant D_o + d(ux_0, x_0) + 8\delta.$$

Ainsi γ_+ est dans le C-voisinage de $u\gamma_+$ où $C = D_o + d(ux_0, x_0) + 8\delta$. On montre de la même manière que $u\gamma_+$ est dans un voisinage fixé de γ_+ et donc que la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ est finite.

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) il existe $C_3 > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle uh^{\pm n} u^{-1} x_0, h^{\pm n} x_0\right\rangle_{x_0} \leqslant C_3,$$

13. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left\langle uh^{\pm n} u^{-1} x_0, h^{\pm n} x_0\right\rangle_{x_0} \leqslant \frac{1}{2} \min\left\{d\left(uh^n u^{-1} x_0, x_0\right), d(h^n x_0, x_0)\right\} - 100\delta.$$

Solution. Puisque h est loxodromique, sa longueur de translation stable est strictement positive. Aussi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\min\left\{d\left(uh^n u^{-1} x_0, x_0\right), d(h^n x_0, x_0)\right\} \geqslant n \left\|h\right\|_\infty > 2C_3 + 200\delta.$$

D'où le résultat.

14. En déduire que, quitte à augmenter la valeur de n, les éléments h^n et uh^nu^{-1} engendrent un groupe libre (on pourra utiliser le critère énoncé dans le lemme 5.18 du cours pour montrer qu'aucun mot réduit en les lettres $a = h^n$ et $b = uh^nu^{-1}$ et leurs inverses ne représente l'élément neutre).

Solution. On note $D_o = D_o(\kappa, \ell, \delta)$ la constante donnée par la stabilité des quasi-géodésiques. Appliquée à γ on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point x_0 est à distance au plus D_o de la géodésique $[\gamma(-nT), \gamma(nT)]$, c'est à dire $[h^{-n}x_0, h^nx_0]$. Par conséquent $\langle h^{-n}x_0, h^nx_0\rangle_{x_0} \leqslant D_o$. L'inégalité triangulaire nous dit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle uh^{-n}u^{-1}x_0, uh^nu^{-1}x_0\right\rangle_{x_0} &= \left\langle h^{-n}u^{-1}x_0, h^nu^{-1}x_0\right\rangle_{u^{-1}x_0} \\
&\leqslant \left\langle h^{-n}x_0, h^nx_0\right\rangle_{x_0} + 3d(ux_0, x_0) \\
&\leqslant D_o + 3d(ux_0, x_0)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré qu'il existe $C_4 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\max\left\{\left\langle h^{-n}x_0, h^nx_0\right\rangle_{x_0}, \left\langle uh^{-n}u^{-1}x_0, uh^nu^{-1}x_0\right\rangle_{x_0}\right\} \leqslant C_4$$

En raisonnant comme à la question précédente on obtient qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on a

$$\begin{aligned}
\left\langle h^{-n}x_0, h^nx_0\right\rangle_{x_0} &< \frac{1}{2}d(x_0, h^nx_0) - 100\delta \\
\left\langle uh^{-n}u^{-1}x_0, uh^nu^{-1}x_0\right\rangle_{x_0} &< \frac{1}{2}d\big(x_0, uh^nu^{-1}x_0\big) - 100\delta.
\end{aligned}$$

On se donne alors $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ et on pose $a = h^n$ et $b = uh^nu^{-1}$. La discussion précédente, combinée à la question 13 nous dit que pour tout $\alpha, \beta \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ tels que $\alpha\beta \neq 1$ on a

$$\langle \alpha x_0, \beta x_0\rangle_{x_0} < \frac{1}{2}\min\left\{d(x_0, \alpha x_0)\,, d(x_0, \beta x_0)\right\} - 100\delta. \tag{1}$$

Notons maintenant $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ un mot réduit sur l'alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. On va montrer que w représente un élément non trivial de G. Pour cela on définit une suite de point (y_k) de la manière suivante.

$$y_k = \alpha_1\cdots\alpha_kx_0$$

de sorte que $y_0 = x_0$ et $y_m = wx_0$. Puisque le mot w est réduit, l'inégalité (1) entraîne que pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$,

$$\langle y_{k-1}, y_{k+1} \rangle_{y_k} < \frac{1}{2} \min \{ d(y_{k-1}, y_k), d(y_{k+1}, y_k) \} - 100\delta.$$

On peut donc appliquer alors le critère vu dans le premier devoir maison : $d(x_0, wx_0) \geqslant 100m\delta > 0$. En particular w est non trivial. On a montré que tous les mots réduits sur l'alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ représente un élément non trivial de G. Autrement dit le sous-groupe engendré par a et b ne vérifie aucune relation. Il est donc libre.

15. Conclure.

Solution. Soit H un sous-groupe de G. On distingue trois cas.

- Si H a une orbite bornée, alors H est fini (question 9)
- Si H contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$... alors il n'y a rien à dire
- Si H ne relève pas des deux cas précédents, alors H contient un copie de $\mathbf{F}_2$ (question 14).