Théorie géométrique des groupes

Devoir maison 2

27 février 2018

1 Sous-groupes d'un groupe hyperbolique.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les sous-groupes d'un groupe hyperbolique. Plus précisément on va montrer que si G est un groupe hyperbolique alors tout sous-groupe H de G vérifie l'une des alternatives suivantes

- H est fini,
- H contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$,
- H contient un sous-groupe isomorphe au groupe libre $\mathbf{F}_2$.

A partir de maintenant on fixe un groupe hyperbolique G. On se donne une partie génératrice finie S de G. L'espace X est le graphe de Cayley $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ qui est δ-hyperbolique. On note x_0 le sommet de X qui correspond à l'identité.

Stabilité des quasi-géodésiques infinies.

1. On fixe $\kappa \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une constante D vérifiant la propriété suivante. Soient $\gamma_1 \colon \mathbb{R}_+ \to X$ et $\gamma_2 \colon \mathbb{R}_+ \to X$ deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques. Si la distance de Hausdorff entre γ_1 et γ_2 est bornée, alors il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que la distance de Hausdorff entre ${\gamma_1}_{|[t_1,\infty[}$ et ${\gamma_2}_{|[t_2,\infty[}$ est au plus D (on pourra s'inspirer de la preuve du Corollaire 5.17 dans le cours).

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) : étant données $\gamma_1 \colon \mathbb{R} \to X$ et $\gamma_2 \colon \mathbb{R} \to X$ deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques bi-infinies, si la distance de Hausdorff entre γ_1 et γ_2 est finie alors elle est en fait inférieure à D.

Isométries préservant un axe. On commence par étudier une isomérie loxodromique $g \in G$. On se donne une géodésique $\gamma\colon [0\,, T] \to X$ entre x_0 et gx_0. On étend γ en un chemin bi-infini g-invariant $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ en posant

$$\gamma(t + nT) = g^n\gamma(t),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0, T[$. Puisque g est loxodromique, on sait qu'il existe $\kappa \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$ tels que γ est une (κ, ℓ)-quasi-géodésique.

2. Soit $u \in G$. Décrire l'action de ugu^{-1} sur la quasi-géodésique $u\gamma$.

On note $E(g)$ l'ensemble des éléments $u \in G$ tel que la distance de Hausdorff entre γ et $u\gamma$ est finie.

3. Montrer que $E(g)$ est un sous-groupe de G.
4. Montrer qu'il existe $C_1 > 0$, tel que pour tout $u \in E(g)$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $d(ux_0, g^n x_0) \leqslant C_1$.
5. En déduire que $\langle g \rangle$ est un sous-groupe d'indice fini de $E(g)$.
6. Soit $u \in G$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{Z}^*$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, tels que $ug^n u^{-1} = g^{\varepsilon n}$. Montrer que u appartient à $E(g)$. On pourra montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$d\Big(ug^{kn}x_0, g^{\varepsilon kn}x_0\Big) \leqslant d(ux_0, x_0)$$

Notons γ_- et γ_+ les restrictions de γ à $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement. Dans les questions qui suivent, u est un élément de G tel que la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ est finie.

7. Montrer qu'il existe $C_2 > 0$ ainsi qu'un point y sur γ_+ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d\big(ug^n u^{-1}y, g^n y\big) \leqslant C_2,$$

   (on pourra utiliser la question 1).

8. En déduire $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $ug^n u^{-1} = g^n$, puis que u appartient à $E(g)$.

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) : si la distance de Hausdorff entre $u\gamma_-$ et γ_- (respectivement $u\gamma_+$ et γ_-, $u\gamma_-$ et γ_+) est finie, alors u appartient à $E(g)$.

Sous-groupes de G. A partir de maintenant on se donne un sous-groupe H de G.

9. Montrer que si l'orbite Hx_0 est bornée alors H est fini.

Supposons maintenant que l'orbite Hx_0 n'est pas bornée. Par ailleurs on suppose que H ne contient pas de sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$.

10. Montrer qu'il existe un élément loxodromique $h \in H$ et $u \in H$ tel que u n'appartient pas à $E(h)$.

11. En déduire que la distance de Hausdorff entre $u\gamma_+$ et γ_+ est infinie.

12. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle uh^n u^{-1} x_0, h^n x_0 \right\rangle_{x_0} \leqslant C_3,$$

(on pourra raisonner par l'absurde et montrer que dans le cas contraire la distance de Hausdorff entre est $u\gamma_+$ et γ_+ est finie).

De la même manière on peut montrer le fait suivant (que l'on ne demande pas de prouver ici) il existe $C_3 > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle uh^{\pm n} u^{-1} x_0, h^{\pm n} x_0 \right\rangle_{x_0} \leqslant C_3,$$

13. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left\langle uh^{\pm n} u^{-1} x_0, h^{\pm n} x_0 \right\rangle_{x_0} \leqslant \frac{1}{2} \min \left\{ d\left(uh^n u^{-1} x_0, x_0\right), d(h^n x_0, x_0) \right\} - 100\delta.$$

14. En déduire que, quitte à augmenter la valeur de n, les éléments h^n et $uh^n u^{-1}$ engendrent un groupe libre (on pourra utiliser le critère énoncé dans le lemme 5.18 du cours pour montrer qu'aucun mot réduit en les lettres $a = h^n$ et $b = uh^n u^{-1}$ et leurs inverses ne représente l'élément neutre).

15. Conclure.