Théorie géométrique des groupes

Devoir maison 1 - Corrigé

20 février 2018

1 Stabilité des quasi-géodésiques locales

L'objectif de cet exercice est de démontrer une version plus forte de la stabilité des quasi-géodésiques vue en cours.

Passage du local au global. On note X un espace géodésique δ-hyperbolique.

1. Soient $a > 0$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soient $x_0, \dots, x_m \in X$ une suite de points tels que pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, on a

$$\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < \frac{1}{2} \min \left\{ d(x_i, x_{i-1}), d(x_i, x_{i+1}) \right\} - a - \delta.$$

   (a) Montrer que $\langle x_0, x_m \rangle_{x_{m-1}} \leqslant \langle x_{m-2}, x_m \rangle_{x_{m-1}} + \delta$.

Solution. La preuve se fait par récurrence sur m. Le résultat est évident si $m = 2$. Supposons le résultat vrai pour $m \geqslant 2$. En appliquant l'inégalité à quatre points avec x_0, x_{m-1}, x_m et x_{m+1} on a

$$\min \left\{ \langle x_0, x_{m+1} \rangle_{x_m}, \langle x_0, x_{m-1} \rangle_{x_m} \right\} \leqslant \langle x_{m-1}, x_{m+1} \rangle_{x_m} + \delta. \qquad (1)$$

Il suffit donc de montrer que le minimum dans le membre de gauche ne peut être atteint par $\langle x_0, x_{m-1} \rangle_{x_m}$. Pour cela on procède par l'absurde. Supposons que le minimum soit atteint par $\langle x_0, x_{m-1} \rangle_{x_m}$. L'inégalité (1) entraine

$$d(x_m, x_{m-1}) - \langle x_0, x_m \rangle_{x_{m-1}} = \langle x_0, x_m \rangle_{x_{m-1}} \leqslant \langle x_{m-1}, x_{m+1} \rangle_{x_m} + \delta.$$

Cependant l'hypothèse de récurrence assure que $\langle x_0, x_m \rangle_{x_{m-1}}$ est majoré par $\langle x_{m-2}, x_m \rangle_{x_{m-1}} + \delta$. Il vient donc

$$d(x_m, x_{m-1}) \leqslant \langle x_{m-1}, x_{m+1} \rangle_{x_m} + \langle x_{m-2}, x_m \rangle_{x_{m-1}} + 2\delta.$$

On sait en outre que $\langle x_{m-1}, x_{m+1}\rangle_{x_m}$ et $\langle x_{m-2}, x_m\rangle_{x_{m-1}}$ sont majorés par $d(x_m, x_{m-1})/2 - a - \delta$. Ainsi

$$d(x_m, x_{m-1}) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) - 2a.$$

Contradiction. Ainsi le minimum dans (1) est atteint par $\langle x_0, x_{m+1}\rangle_{x_m}$. Autrement dit

$$\langle x_0, x_{m+1}\rangle_{x_m} \leqslant \langle x_{m-1}, x_{m+1}\rangle_{x_m} + \delta.$$

L'hypothèse de récurrence est donc vraie au rang $m+1$.

(b) En déduire que $d(x_0, x_m) \geqslant 2am$.

Solution. On raisonne à nouveau par récurrence sur m. Le résultat est évident si $m = 0$. Il découle de l'hypothèse sur la suite (x_i) si $m = 1$. Supposons maintenant le résultat vrai pour $m \geqslant 1$. D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m+1}) &= d(x_0, x_m) + d(x_m, x_{m+1}) - 2\langle x_0, x_{m+1}\rangle_{x_m} \\ &\geqslant d(x_0, x_m) + d(x_m, x_{m+1}) - 2\langle x_{m-1}, x_{m+1}\rangle_{x_m} - 2\delta \end{aligned}$$

D'une part l'hypothèse de récurrence nous dit que $d(x_0, x_m) \geqslant 2am$. D'autre par l'hypothèse sur la suite (x_i) assure que

$$d(x_m, x_{m+1}) - 2\langle x_{m-1}, x_{m+1}\rangle_{x_m} - 2\delta \geqslant 2a.$$

Par conséquent

$$d(x_0, x_{m+1}) \geqslant 2a(m+1),$$

ce qui montre que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $m+1$.

Étant donnés $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ et $L, \ell \in \mathbb{R}_+$, une (κ,ℓ)-*quasi-géodésique* L-*locale* est un chemin $\gamma\colon [a\,,b] \to X$ tel que pour tout $s, t \in [a\,,b]$ vérifiant $|s-t| \leqslant L$ on a

$$\kappa^{-1}|s-t| - \ell \leqslant d(\gamma(s), \gamma(t)) \leqslant \kappa|s-t| + \ell.$$

Fixons $\kappa \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$.

2. Soit $\kappa' > \kappa$. Montrer qu'il existe $L \geqslant 0$ tel que toute (κ,ℓ)-quasi-géodésique L-locale $\gamma\colon [a\,,b] \to X$ est aussi une (κ',ℓ)-quasi-géodésique globale.

Solution. D'après la stabilité des quasi-géodésiques, on sait qu'il existe une constante $D = D(\kappa, \ell, \delta)$ telle que la distance de Hausdorff entre deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques ayant les mêmes extrémités est au plus D. On fixe maintenant deux réels $\varepsilon, L \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$(1-\varepsilon)\kappa^{-1} > {\kappa'}^{-1}$$

$$\frac{L}{4}\left[(1-\varepsilon)\kappa^{-1} - {\kappa'}^{-1}\right] > D + \frac{1}{2}\ell + \delta \quad \text{et} \quad \kappa + \frac{2\ell}{(1-\varepsilon)L} < \kappa'$$

Soit $\gamma\colon I \to X$ une (κ, ℓ)-quasi-géodésique L-locale. On va montrer que γ est une (κ', ℓ)-quasi-géodésique. Pour cela on se donne $s, s' \in I$ avec $s \leqslant s'$. Observons que si $|s - s'| \leqslant L$ alors par hypothèse,

$$\kappa^{-1}\left|s - s'\right| - \ell \leqslant d\big(\gamma(s), \gamma(s')\big) \leqslant \kappa\left|s - s'\right| + \ell$$

Ce qui entraine

$${\kappa'}^{-1}\left|s - s'\right| - \ell \leqslant d\big(\gamma(s), \gamma(s')\big) \leqslant \kappa'\left|s - s'\right| + \ell$$

On peut donc supposer que $|s - s'| > L$. On se donne une partition $s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_m = s$ de l'intervalle $[s\,, s']$ telle que pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$ on a

$$(1-\varepsilon)\frac{L}{2} \leqslant |t_i - t_{i+1}| \leqslant \frac{L}{2}.$$

On notera au passage que

$$m(1-\varepsilon)\frac{L}{2} \leqslant \left|s' - s\right| \leqslant m\frac{L}{2}.$$

Soit $i \in [\![1, m-1]\!]$. Par construction $|t_{i-1} - t_{i+1}| \leqslant L$. Il découle de notre hypothèse que le chemin γ restreint à $[t_{i-1}\,, t_{i+1}]$ est un (κ, ℓ)-quasi-géodésique. D'après la stabilité des quasi-géodésique, $\gamma(t_i)$ est à distance au plus D de la géodésique $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+1})]$. Par conséquent

$$\langle \gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+1}) \rangle_{\gamma(t_i)} \leqslant D.$$

Par ailleurs, puisque γ restreint à $[t_{i-1}\,, t_{i+1}]$ est un (κ, ℓ)-quasi-géodésique on a

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \geqslant \kappa^{-1}\left|t_i - t_{i+1}\right| - \ell \geqslant \kappa^{-1}(1-\varepsilon)\frac{L}{2} - \ell$$

De la même manière

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \geqslant \kappa^{-1}(1-\varepsilon)\frac{L}{2} - \ell$$

Il découle de notre choix de L que pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$ on a

$$\langle \gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+1}) \rangle_{\gamma(t_i)} < \frac{1}{2} \min \{ d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \,, d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \} - a - \delta.$$

où

$$a = \frac{\kappa'^{-1} L}{4}.$$

En appliquant la question précédente, il vient donc $d(\gamma(s), \gamma(s')) \geqslant 2am$. On se rappelle que $mL \geqslant 2|s'-s|$. Ce qui entraine

$$d\big(\gamma(s), \gamma(s')\big) \geqslant \kappa'^{-1} \left| s' - s \right|.$$

Cela fourni une première inégaglité. Il nous reste à majorer $d(\gamma(s), \gamma(s'))$. On rappelle que pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$, le chemin γ restreint à $[t_i \,, t_{i+1}]$ est une (κ, ℓ)-quasi-géodésique, de sorte que

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \leqslant \kappa \left| t_i - t_{i+1} \right| + \ell.$$

L'inégalité triangulaire entraine alors

$$d\big(\gamma(s), \gamma(s')\big) \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \leqslant \kappa \left| s' - s \right| + m\ell.$$

En utilisant l'inégalité $m(1-\varepsilon)L \ \leqslant 2|s'-s|$, il vient

$$d\big(\gamma(s), \gamma(s')\big) \leqslant \left(\kappa + \frac{2\ell}{(1-\varepsilon)L} \right) \left| s' - s \right| \leqslant \kappa' \left| s' - s \right|.$$

La dernière inégalité est un conséquence de notre choix de L. On a donc montré que pour tout $s, s' \in I$ on a

$$\kappa'^{-1} \left| s - s' \right| - \ell \leqslant d\big(\gamma(s), \gamma(s')\big) \leqslant \kappa' \left| s - s' \right| + \ell.$$

Donc γ est un (κ', ℓ)-quasi-géodésique (globale).

3. Montrer qu'il existe $L \geqslant 0$ et $D \geqslant 0$, tels que si γ_1 et γ_2 sont deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques L-locales ayant les mêmes extrémités alors γ_1 est dans le D-voisinage de γ_2 (et vice versa).

Solution. D'après la stabilité des quasi-géodésiques (globales), il existe une constante $D = D(2\kappa, \ell, \delta)$ telle que la distance de Hausdorff entre deux $(2\kappa, \ell)$-quasi-géodésiques ayant les mêmes extrémités est au plus D. Par ailleurs la question précédente nous dit qu'il existe une constante $L > 0$, telle que toute (κ, ℓ)-quasi-géodésique L-locale est aussi une $(2\kappa, \ell)$-quasi-géodésique (globale). Considérons maintenant deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques L-locales γ_1 et γ_2 ayant les mêmes extrémités. D'après la question précédente, ces deux chemins sont des $(2\kappa, \ell)$-quasi-géodésiques. En appliquant la stabilité des quasi-géodésiques on obtient que γ_1 est dans le D-voisinage de γ_2 (et vice versa).

Application aux groupes hyperboliques. Soit G un groupe engendré par une partie finie S. On dit que *le problème du mot est résoluble dans* G s'il existe un algorithme qui étant un mot w sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ décide si w représente l'élément trivial de G. L'objectif des questions suivantes est de montrer que le problème du mot est résoluble dans un groupe hyperbolique.

On se donne une présentation finie $\langle S \mid R \rangle$ de G. Si w est un mot sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ on note $|w|$ sa longueur. On dit que $\langle S \mid R \rangle$ est une *présentation de Dehn* si elle vérifie la propriété suivante : pour tout mot réduit w sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ représentant l'élément trivial de G, il existe $r \in R$, qui se décompose de la manière suivante $r = r_1 r_2$, avec $|r_1| < |r_2|$, de sorte que r_2 est un *sous-mot* de w.

4. Montrer que si le groupe G admet une présentation de Dehn, alors le problème du mot est résoluble pour G.

Solution. On décompose toutes les relations $r \in R$ en un produit de mot $r = p_r s_s$ de sorte que

$$|p_r| = E\left(\frac{|r|}{2}\right) + 1.$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. En d'autre termes la longueur de p_r est la moitié de celle de r plus une lettre. De sorte que p_r est le plus petit préfixe de r tel que $|p_r| > |s_r|$. On pose

$$\mathcal{P} = \{p_r \mid r \in R\}.$$

C'est un ensemble fini. Puisque $\langle S \mid R \rangle$ est une présentation de Dehn, tout mot réduit w sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ représentant l'identité dans G, contient un sous-mot $\mathcal{P}$. L'algorithme pour résoudre le problème du mot est le suivant. On se fixe un mot réduit w sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$.

(i) Si w est le mot vide, w représente l'élément neutre et l'algorithme s'arrête. Sinon on cherche si w contient un sous-mot $p_r \in \mathcal{P}$.

(ii) Si la réponse est non, w ne représente pas l'identité, et l'algorithme s'arrête. Si la réponse est oui on effectue l'opération suivante : on remplace dans w, le sous-mots p_r par s_r^{-1}. Si nécessaire on réduit le mot obtenu. On appelle w' le mot résultant de cette opération. Puisque r est une relation, on a $r = p_r s_r = 1$ (comme éléments de G). Autrement dit $p_r = s_r^{-1}$. Ainsi w' et w représentent le même élément de G. Il suffit donc de chercher si w' représente l'identité. En outre comme $|s_r| < |p_r|$, le mot w' est strictement plus court que w. On a donc « simplifié » le problème. On reprend donc l'algorithme à l'étape (i) avec w'.

A chaque boucle de l'algorithme, la longueur du mot considéré décroit strictement. Aussi l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'étapes.

5. Montrer que tout groupe hyperbolique admet une présentation de Dehn.

Solution. On note X le graphe de Cayley de G pour une partie génératrice finie S de G. C'est un espace δ-hyperbolique. On note x_0 le sommet correspondant à l'élément neutre. D'après la question (2), il existe $L > 0$ tel que tout $(1,0)$-géodésique L-locale est une $(2,0)$-quasi-géodésique. On notera qu'il existe une correspondance entre les mots sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ et les chemins dans X issu de x_0. On note alors $\mathcal{U}$ l'ensemble des mots de longueurs L qui ne représente pas un géodésique. Étant donné un mot $u \in \mathcal{U}$, il existe un mot s_u sur $S \cup S^{-1}$ strictement plus court qui représente le même élément. On considère alors le groupe G' donné par la présentation

$$G' = \left\langle S \mid u s_u^{-1},\ \forall u \in \mathcal{U} \right\rangle$$

On notera que pour tout $u \in \mathcal{U}$, l'élément $u s_u^{-1}$ représente l'identité dans G. Aussi la projection $\mathbf{F}(S) \twoheadrightarrow G$ induit une surjection $G' \twoheadrightarrow G$. Montrons que cette application est un isomorphisme. Soit w un mot réduit sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$, autrement dit un élément de $\mathbf{F}(S)$. On note g son image dans G. On peut voir w comme un chemin dans X entre x_0 et gx_0. On affirme que si $g = 1$ alors w n'est pas une $(1,0)$-quasi-géodésique L-locale. En effet si tel était le cas, w serait une $(2,0)$-quasi-géodésique (globale) et donc

$$d(gx_0, x_0) \geqslant \frac{1}{2}|w| > 0,$$

ce qui contredit le fait que g est trivial. Par conséquent w s'écrit $w = w_1 u w_2$ où u est un sous-mot de longueur L qui n'est pas géodésique. En particulier u est un élément de $\mathcal{U}$ de sorte que us_u^{-1} est une relation de G'. On peut alors écrire

$$w = w_1 \left(us_u^{-1}\right) w_1^{-1} \left(w_1 s_u w_2\right)$$

Ainsi w est le produit d'un conjugué de us_u^{-1} par $w_1 s_u w_2$. Par construction s_u est plus court de u, aussi $w_1 s_u w_2$ est plus court que w. En répétant le même argument, on observe que w peut s'écrire comme le produit de conjugués d'éléments de la forme us_u^{-1} avec $u \in \mathcal{U}$. Autrement dit w est dans le sous-groupe normal engendré par $\{us_u^{-1} \mid u \in \mathcal{U}\}$, c'est à dire le noyau de $\mathbf{F}(S) \twoheadrightarrow G'$. Par conséquent, G' et G sont isomorphes. Ce qui signifie qu'une présentation finie de G est

$$G = \left\langle S \mid us_s^{-1},\ \forall u \in \mathcal{U} \right\rangle$$

Le même raisonnement montre que cette présentation est en fait une présentation de Dehn.

2 Cone asymptotique

Soit X un espace métrique. Soit ω un ultra-filtre non-principal. On se donne une suite de points de X notée $x = (x_n)$ et une suite réelle $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ convergent vers 0. Le *cône asymptotique* de X relativement à x, ε et ω est l'espace métrique

$$\mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon) = \lim_\omega \left(\varepsilon_n X, x_n\right).$$

où $\varepsilon_n X$ est l'espace X renormalisé par ε_n, c'est à dire $d_{\varepsilon_n X}(p, q) = \varepsilon_n d_X(p, q)$.

1. Soit $f \colon X \to Y$ une quasi-isométrie entre X et un autre espace métrique Y. On considère la suite $y = (f(x_n))$. Montrer que $\mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon)$ et $\mathrm{Con}_\omega(Y, y, \varepsilon)$ sont homéomorphes.

Solution. On fixe $\kappa \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$ tels que f est un plongement quasi-isométrique. On définit une application

$$f_\omega \colon \mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon) \to \mathrm{Con}_\omega(Y, y, \varepsilon)$$

de la manière suivante : si $x' = \lim_\omega x'_n$ est un point de $\mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon)$, on pose

$$f_\omega(x') = \lim_\omega f(x'_n).$$

Notons que cette application est bien définie. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\varepsilon_n d\big(f(x'_n), y_n\big) = \varepsilon_n d\big(f(x'_n), f(x_n)\big) \leqslant \kappa \left(\varepsilon_n d\big(x'_n, x_n\big)\right) + \varepsilon_n \ell$$

Puisque la suite $\varepsilon_n d(x_n, x'_n)$ est bornée, il en est de même de $\varepsilon_n d(f(x'_n), y_n)$ est bornée. Il est donc légitime de prendre la limite selon ω de cette suite. Par ailleurs l'image de x' ne dépend pas du choix de la suite (x'_n). En effet si (x''_n) est une autre suite représentant x' on a

$$\varepsilon_n d\big(f(x'_n), f(x''_n)\big) \leqslant \kappa \left(\varepsilon_n d\big(x'_n, x''_n\big)\right) + \varepsilon_n \ell$$

Puisque $\varepsilon_n d(x'_n, x''_n)$ converge vers 0, il en est de même de $\varepsilon_n d(f(x'_n), f(x''_n))$. Autrement dit les suites $f(x'_n)$ et $f(x''_n)$ représentent le même point de $\mathrm{Con}_\omega(Y, y, \varepsilon)$.

On affirme maintenant que f_ω est bi-Lipschitz (et donc continue). Considérons deux point $x^1 = \lim_\omega x^1_n$ et $x^2 = \lim_\omega x^2_n$ de $\mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\kappa^{-1} d\big(x^1_n, x^2_n\big) - \ell \leqslant d\big(f(x^1_n), f(x^2_n)\big) \leqslant \kappa d\big(x^1_n, x^2_n\big) + \ell.$$

En multipliant par ε_n (qui converge vers 0) et en passant à la limite selon ω, il vient

$$\kappa^{-1} d\big(x^1, x^2\big) \leqslant d\big(f_\omega(x^1), f_\omega(x^2)\big) \leqslant \kappa d\big(x^1, x^2\big),$$

ce qui est le résultat annoncé. Il nous reste donc à montrer que f_ω admet un inverse continu. Puisque f est une quasi-isométrie, il existe un plongement quasi-isométrique $g\colon Y \to X$ et une constante $C > 0$ tels que

(i) pour tout $x' \in X$, on a $d(g \circ f(x'), x') \leqslant C$,
(ii) pour tout $y' \in Y$, on a $d(f \circ f(y'), y') \leqslant C$.

En procédant comme pour f on défini une application continue

$$\begin{array}{rccc} g_\omega\colon & \mathrm{Con}_\omega(Y, y, \varepsilon) & \to & \mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon) \\ & y' = \lim_\omega y'_n & \to & \lim_\omega g(y'_n) \end{array}$$

On affirme que g_ω est l'inverse de f_ω. Soit $x' = \lim_\omega x'_n$ un point de $\mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon)$. Par définition $f_\omega(x') = \lim_\omega f(x'_n)$. En applicant alors la définition de g_ω, on observe que $g_\omega \circ f_\omega(x') = \lim_\omega g \circ f(x'_n)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$d\big(g \circ f(x'_n), x'_n\big) \leqslant C$$

En multipliant par ε_n (qui tend vers 0) et en prenant la limite selon ω, on observe que $g_\omega \circ f_\omega(x') = x'$. Ainsi $g_\omega \circ f_\omega = \mathrm{Id}$. On montre de même que $f_\omega \circ g_\omega = \mathrm{Id}$, ce qui termine la preuve.

2. Montrer que $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$ ne sont pas quasi-isométriques.

Solution. Une fois une suite de point base $x = (x_n)$ et une suite de renormalisation $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ fixés, on montre que le cône asymptotique $\mathrm{Con}_\omega(\mathbb{Z}^n, x, \varepsilon)$ de $\mathbb{Z}^n$ est isométrique $\mathbb{R}^n$ muni de la distance L^1. Or $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes (par exemple le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est $\mathbb{Z}$ tandis que celui de $\mathbb{R}^3$ privé d'un point est trivial). Donc $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$ ne peuvent pas être quasi-isométriques.

3 Groupe d'automorphisme extérieur d'un groupe hyperbolique

Soit G un groupe. Pour tout $h \in G$, on note $\iota_h \colon G \to G$ la conjugaison par h, c'est à dire l'application qui envoie g sur hgh^{-1}. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Le sous-ensemble

$$\mathrm{Int}\,(G) = \{\iota_h \mid h \in G\}$$

est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$. Le *groupe des automorphismes extérieurs* de G, noté $\mathrm{Out}(G)$, est le quotient $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$.

On fixe maintenant un espace propre géodésique et δ-hyperbolique X ainsi qu'un groupe G agissant par isométries sur X de façon proprement discontinue et co-compacte. Soit S une partie génératrice finie de G. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ on défini le *déplacement minimal* de φ comme

$$\lambda(\varphi) = \inf_{x \in X} \max_{s \in S} d(\varphi(s)x, x)\,.$$

1. Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux automorphismes de G ayant la même image dans $\mathrm{Out}(G)$ alors $\lambda(\varphi_1) = \lambda(\varphi_2)$.

Solution. Par hypothèse il existe $u \in G$ tel que pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi_2(g) = u\varphi_1(g)u^{-1}.$$

Soit $x \in X$. La définition de $\lambda(\varphi_1)$ entraine

$$\lambda(\varphi_1) \leqslant \max_{s \in S} d\big(\varphi_1(s)u^{-1}x, u^{-1}x\big) \leqslant \max_{s \in S} d\big(u\varphi_1(s)u^{-1}x, x\big) \leqslant \max_{s \in S} d(\varphi_2(s)x, x)\,.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $x \in X$, il vient $\lambda(\varphi_1) \leqslant \lambda(\varphi_2)$. Par symétrie on a $\lambda(\varphi_2) \leqslant \lambda(\varphi_1)$, d'où l'égalité.

A partir de maintenant on suppose que $\mathrm{Out}(G)$ est infini.

2. Montrer qu'il existe une suite (φ_n) d'automorphismes de G telle que $\lambda(\varphi_n)$ tends vers l'infini.

Solution. On raisonne par contraposée. Supposons qu'il existe λ_0, tel que pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, on ait $\lambda(\varphi) \leqslant \lambda_0$. On se donne un point base $x_0 \in X$. Puisque l'action de G sur X est co-compacte, il existe $R \geqslant 0$, tel que X est recouvert par $G \cdot B(x_0, R)$. On note alors E l'ensemble

$$E = \{g \in G \mid d(gx_0, x_0) \leqslant 2R + \lambda_0 + 1\}.$$

Comme l'action de G sur X est propre, cet ensemble est fini. Par conséquent le sous-ensemble

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,(G) \mid \varphi(s) \in E,\ \forall s \in S\}$$

de $\mathrm{Aut}(G)$ est fini. On va montrer que modulo conjugaison, tout automorphisme de G est dans $\mathcal{A}$. Considérons $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Vu notre hypothèse, il existe $x \in X$, tel que

$$\max_{s \in S} d(\varphi(s)x, x) \leqslant \lambda_0 + 1.$$

Par définition de R, il existe $u \in G$ tel que $d(x, ux_0) \leqslant R$. L'inégalité triangulaire entraine alors que pour tout $s \in S$,

$$d\big(u^{-1}\varphi(s)ux_0, x_0\big) = d(\varphi(s)ux_0, ux_0) \leqslant d(\varphi(s)x, x) + 2d(x, ux_0) \leqslant \lambda_0 + 2R + 1.$$

Par conséquent si on appelle ψ l'automorphisme défini par $\psi = \iota_u^{-1} \circ \varphi$, alors ψ est un élément de $\mathcal{A}$. On vient de montrer que tout automorphisme extérieur de G a un pré-image dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathrm{Out}(G)$ est fini.

On se donne un ultra-filtre non-principal ω. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n un copie de l'espace X renormalisée par $1/\lambda(\varphi_n)$. On munit X_n d'une action « tordue » de G définie ainsi : pour tout $g \in G$, pour tout $x \in X_n$, on pose $g \cdot x = \varphi_n(g)x$.

3. Montrer qu'il existe une suite de points (x_n^0) tel que pour tout $s \in S$, on a

$$d\big(s \cdot x_n^0, x_n^0\big) \leqslant 2.$$

Solution. Par définition de $\lambda(\varphi_n)$, il existe $x_n^0 \in X$, tel que

$$\max_{s \in S} d_X\left(\varphi_n(s)x_n^0, x_n^0\right) \leqslant 2\lambda(\varphi_n).$$

Cette inégalité se réécrit dans X_n avec l'action tordue de la manière suivante

$$\max_{s \in S} d_{X_n}\left(s \cdot x_n^0, x_n^0\right) \leqslant 2.$$

4. Montrer que l'espace $X_\omega = \lim_\omega(X_n, x_n^0)$ est un arbre réel.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace X_n est géodésique. Par ailleurs, puisque X est δ-hyperbolique, X_n est δ_n-hyperbolique avec $\delta_n = \delta/\lambda(\varphi_n)$. D'après notre hypothèse $\lambda(\varphi_n)$ diverge vers l'infini donc δ_n converge vers 0. Il en découle que la limite selon ω de la suite (X_n) est un arbre réel.

5. Montrer que l'action tordue de G sur X_n induit une action par isométries de G sur X_ω.

Solution. Soit $g \in G$. Si $x = \lim_\omega x_n$ est un point de X_ω, on pose

$$gx = \lim_\omega g \cdot x_n. \tag{2}$$

Montrons d'abord que cette définition est licite. Puisque G est engendré par S on peut écrire $g = s_0 s_1 \dots s_m$ ou $s_i \in S \cup S^{-1}$. L'inégalité triangulaire nous dit alors que

$$\begin{aligned} d_{X_n}\left(g \cdot x_n, x_n^0\right) &\leqslant d_{X_n}\left(g \cdot x_n, g \cdot x_n^0\right) + \sum_{i=0}^{m-1} d_{X_n}\left(s_0 \dots s_i x_n^0, s_0 \dots s_{i-1} x_n^0\right) \\ &\leqslant d_{X_n}\left(x_n, x_n^0\right) + \sum_{i=0}^{m-1} d_{X_n}\left(s_i x_n^0, x_n^0\right) \end{aligned}$$

En utilisant la question précédent il vient

$$d_{X_n}\left(g \cdot x_n, x_n^0\right) \leqslant d_{X_n}\left(x_n, x_n^0\right) + 2m$$

Comme (x_n) défini un point de X_ω, la suite $d_{X_n}(x_n, x_n^0)$ est bornée. Par conséquent $d_{X_n}(g \cdot x_n, x_n^0)$ aussi. La suite $(g \cdot x_n)$ défini donc bien un point de X_ω. Montrons maintenant que ce point ne dépend pas du choix de (x_n). Considérons une autre suite (x'_n) de points de $\Pi_\omega X_n$ telle que $x = \lim_\omega x'_n$. Puisque l'action tordue de G est une action par isométrie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$d_{X_n}\left(g \cdot x_n, g \cdot x'_n\right) = d_{X_n}\left(x_n, x'_n\right).$$

Aussi $d_{X_n}(g \cdot x_n, g \cdot x'_n)$ converge vers 0, ce qui nous dit que $(g \cdot x_n)$ et $(g \cdot x'_n)$ définissent le même point de X_ω. Il nous reste à montrer que g est une isométrie de X_ω. Soient $x = \lim_\omega x_n$ et $y = \lim_\omega y_n$ deux points de X_ω. Puisque l'action tordue de G est une action par isométrie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$d_{X_n}(g \cdot x_n, g \cdot y_n) = d_{X_n}(x_n, y_n).$$

En passant à la limite, il vient $d_{X_\omega}(gx, gy) = d_{X_\omega}(x, y)$. Ainsi (2) défini bien une isométrie de X_ω. On vérifie aisément que (2) défini aussi une action de groupe de G sur X_ω.

6. Montre que l'action de G sur X_ω n'a pas de point fixe global.

Solution. Supposons au contraire que G fixe un point $x = \lim_\omega x_n$ de X_ω. En particulier $sx = x$, pour tout $s \in S$. Ce qui signifie exactement que pour tout $s \in S$,

$$\lim_\omega \frac{1}{\lambda(\varphi_n)} d_X(\varphi_n(s)x_n, x_n) = \lim d_{X_n}(s \cdot x_n, x_n) = 0$$

Par conséquent ω-presque sûrement, on a

$$\frac{1}{\lambda(\varphi_n)} \max_{s \in S} d_X(\varphi_n(s)x_n, x_n) < \frac{1}{2},$$

ce qui viole la définition de $\lambda(\varphi_n)$.

Soient p, q et r trois entiers supérieurs à 100. On admettra que le groupe G donné par la présentation

$$G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1 \rangle$$

est hyperbolique.

7. Montrer que le groupe d'automorphismes extérieurs de G est fini.

Solution. D'après le lemme de Serre (cf. notes de cours) si G agit par isométrie sur un arbre réel alors G a un point fixe global. Il découle de l'étude précédente que le groupe d'automorphismes extérieurs de G ne peut pas être infini.