Théorie géométrique des groupes

Devoir maison 1

20 février 2018

1 Stabilité des quasi-géodésiques locales

L'objectif de cet exercice est de démontrer une version plus forte de la stabilité des quasi-géodésiques vue en cours.

Passage du local au global. On note X un espace géodésique δ-hyperbolique.

1. Soient $a > 0$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soient $x_0, \ldots, x_m \in X$ une suite de points tels que pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, on a

$$\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < \frac{1}{2} \min \{d(x_i, x_{i-1}), d(x_i, x_{i+1})\} - a - \delta.$$

   (a) Montrer que $\langle x_0, x_m \rangle_{x_{m-1}} \leqslant \langle x_{m-2}, x_m \rangle_{x_{m-1}} + \delta$.

   (b) En déduire que $d(x_0, x_m) \geqslant 2am$.

   Pour chaque question on pourra faire une récurrence sur m.

Étant donnés $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ et $L, \ell \in \mathbb{R}_+$, une (κ, ℓ)*-quasi-géodésique* L*-locale* est un chemin $\gamma\colon [a\,, b] \to X$ tel que pour tout $s, t \in [a\,, b]$ vérifiant $|s - t| \leqslant L$ on a

$$\kappa^{-1} |s - t| - \ell \leqslant d(\gamma(s), \gamma(t)) \leqslant \kappa |s - t| + \ell.$$

Fixons $\kappa \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$.

2. Soit $\kappa' > \kappa$. Montrer qu'il existe $L \geqslant 0$ tel que toute (κ, ℓ)-quasi-géodésique L-locale $\gamma\colon [a\,, b] \to X$ est aussi une (κ', ℓ)-quasi-géodésique globale.

3. Montrer qu'il existe $L \geqslant 0$ et $D \geqslant 0$, tels que si γ_1 et γ_2 sont deux (κ, ℓ)-quasi-géodésiques L-locales ayant les mêmes extrémités alors γ_1 est dans le D-voisinage de γ_2 (et vice versa).

Application aux groupes hyperboliques. Soit G un groupe engendré par une partie finie S. On dit que *le problème du mot est résoluble dans* G s'il existe un algorithme qui étant un mot w sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ décide si w représente l'élément trivial de G. L'objectif des questions suivantes est de montrer que le problème du mot est résoluble dans un groupe hyperbolique.

On se donne une présentation finie $\langle S \mid R \rangle$ de G. Si w est un mot sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ on note $|w|$ sa longueur. On dit que $\langle S \mid R \rangle$ est une *présentation de Dehn* si elle vérifie la propriété suivante : pour tout mot réduit w sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ représentant l'élément trivial de G, il existe $r \in R$, qui se décompose de la manière suivante $r = r_1 r_2$, avec $|r_1| < |r_2|$, de sorte que r_2 est un *sous-mot* de w.

4. Montrer que si le groupe G admet une présentation de Dehn, alors le problème du mot est résoluble pour G.

5. Montrer que tout groupe hyperbolique admet une présentation de Dehn.

2 Cone asymptotique

Soit X un espace métrique. Soit ω un ultra-filtre non-principal. On se donne une suite de points de X notée $x = (x_n)$ et une suite réelle $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ convergent vers 0. Le *cône asymptotique* de X relativement à x, ε et ω est l'espace métrique

$$\mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon) = \lim_\omega \left(\varepsilon_n X, x_n\right).$$

où $\varepsilon_n X$ est l'espace X renormalisé par ε_n, c'est à dire $d_{\varepsilon_n X}(p,q) = \varepsilon_n d_X(p,q)$.

1. Soit $f\colon X \to Y$ une quasi-isométrie entre X et un autre espace métrique Y. On considère la suite $y = (f(x_n))$. Montrer que $\mathrm{Con}_\omega(X, x, \varepsilon)$ et $\mathrm{Con}_\omega(Y, y, \varepsilon)$ sont homéomorphes.

2. Montrer que $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$ ne sont pas quasi-isométriques.

3 Groupe d'automorphisme extérieur d'un groupe hyperbolique

Soit G un groupe. Pour tout $h \in G$, on note $\iota_h\colon G \to G$ la conjugaison par h, c'est à dire l'application qui envoie g sur hgh^{-1}. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Le sous-ensemble

$$\mathrm{Int}\,(G) = \{\iota_h \mid h \in G\}$$

est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$. Le *groupe des automorphismes extérieurs* de G, noté $\mathrm{Out}(G)$, est le quotient $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Int}(G)$.

On fixe maintenant un espace propre géodésique et δ-hyperbolique X ainsi qu'un groupe G agissant par isométries sur X de façon proprement discontinue et co-compacte. Soit S une partie génératrice finie de G. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ on défini le *déplacement minimal* de φ comme

$$\lambda(\varphi) = \inf_{x \in X} \max_{s \in S} d(\varphi(s)x, x)\,.$$

1. Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux automorphismes de G ayant la même image dans $\mathrm{Out}(G)$ alors $\lambda(\varphi_1) = \lambda(\varphi_2)$.

A partir de maintenant on suppose que $\mathrm{Out}(G)$ est infini.

2. Montrer qu'il existe une suite (φ_n) d'automorphismes de G telle que $\lambda(\varphi_n)$ tends vers l'infini.

On se donne un ultra-filtre non-principal ω. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n un copie de l'espace X renormalisée par $1/\lambda(\varphi_n)$. On munit X_n d'une action « tordue » de G définie ainsi : pour tout $g \in G$, pour tout $x \in X_n$, on pose $g \cdot x = \varphi_n(g)x$.

3. Montrer qu'il existe une suite de points (x_n^0) tel que pour tout $s \in S$, on a
$$d\big(s \cdot x_n^0, x_n^0\big) \leqslant 2.$$

4. Montrer que l'espace $X_\omega = \lim_\omega(X_n, x_n^0)$ est un arbre réel.

5. Montrer que l'action tordue de G sur X_n induit une action par isométries de G sur X_ω.

6. Montre que l'action de G sur X_ω n'a pas de point fixe global.

Soient p, q et r trois entiers supérieurs à 100. On admettra que le groupe G donné par la présentation

$$G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1 \rangle$$

est hyperbolique.

7. Montrer que le groupe d'automorphismes extérieurs de G est fini.