

Théorie géométrique des groupes

Rémi Coulon

2 mars 2018

Table des matières

1	Généralités sur les groupes	4
1.1	Groupes de type fini	4
1.2	Quasi-isométries.	5
2	Quelques spécimens dans le bestiaire des groupes	8
2.1	Groupes libres	8
2.2	Groupes de présentation finie	8
2.3	Groupes de surfaces	9
3	Action de groupe sur un arbre	10
3.1	Définitions	10
3.2	Exemples d'action sur un arbre	11
3.3	Isométries d'un arbre	15
3.4	Lemme de Serre	17
4	Espaces hyperboliques (au sens de Gromov)	18
4.1	Définition et exemples	18
4.2	Invariance par quasi-isométries	21
4.3	Ultra-limite d'espace métrique	23
4.4	Stabilité des quasi-géodésiques	26
4.5	Groupes hyperboliques	28
5	Isométries d'un espace hyperbolique	29
5.1	Longueurs de translation	29
5.2	Interlude : quasi-convexité	30
5.3	Ensemble caractéristique	33
5.4	Études des isométries selon leur type	35
5.5	Le bord à l'infini d'un espace hyperbolique.	42
6	Théorie de la petite simplification	43
6.1	Définition et premiers exemples.	43
6.2	Généricité des groupes hyperboliques	44
6.3	Construction de Rips	47
6.4	Petite simplification dans un espace hyperbolique.	49
6.5	Groupes de torsion et autres créatures exotiques	57
7	Démonstration des théorèmes de petite simplification	61
7.1	Stratégie générale	61
7.2	Cone sur un espace métrique.	62
7.3	Espace cône.	63
7.4	L'énoncé principal	64
7.5	Première étape : la géométrie de l'espace cône	66
7.6	Qu'a-t-on gagné à ce changement d'espace?	68
7.7	Seconde étape : les famille de rotations.	69
7.8	Un exemple d'utilisation de \bar{X}	70

Références

- [1] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [2] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [3] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [4] R. Coulon. On the geometry of Burnside quotients of torsion free hyperbolic groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 24(3) :251–345, 2014.
- [5] R. Coulon. Théorie de la petite simplification : une approche géométrique [d’après F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin et S. Cantat, S. Lamy]. *Astérisque*, (380, Seminaire Bourbaki. Vol. 2014/2015) :Exp. No. 1089, 1–33, 2016.
- [6] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [7] T. Delzant and M. Gromov. Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification. *Journal of Topology*, 1(4) :804–836, 2008.
- [8] É. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, Boston, MA, 1990.
- [9] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, pages 75–263. Springer, New York, New York, 1987.
- [10] M. Gromov. *Mesoscopic curvature and hyperbolicity*, volume 288 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.
- [11] R. C. Lyndon and P. E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [12] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* , volume 46. Société Mathématique de France, Paris, 1977.

1 Généralités sur les groupes

1.1 Groupes de type fini

Définition 1.1. Un groupe G est de *type fini* s'il existe une partie finie $S \subset G$ de sorte que tout élément $g \in G$ admet une écriture de la forme $g = s_1 s_2 \dots s_m$ où $s_i \in S \cup S^{-1}$.

Vocabulaire. On dit que S est une *partie génératrice* de G ou que S *engendre* G .

Exemples.

- (i) \mathbb{Z}^n est un groupe de type fini
- (ii) $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ est un groupe de type fini.

Graphe de Cayley. Le graphe de Cayley est une manière géométrique de représenter un groupe. Il est parfois présenté comme un analogue de la table de groupe.

Soit G un groupe de type fini et S une partie génératrice de G . Le *graphe de Cayley* de G relativement à S est le graphe (non orienté) dont l'ensemble des sommets est G . Deux sommets $g_1, g_2 \in G$ sont reliés par une arête s'il existe $s \in S \cup S^{-1}$ tel que $g_2 = g_1 s$. On le notera $\text{Cay}(G, S)$.

Exercice 1.2. Montrer que $\text{Cay}(G, S)$ est connexe.

Exemples.

- (i) Le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 engendré par $S = \{a, b\}$ où $a = (1, 0)$ et $b = (0, 1)$.
- (ii) Le graphe de Cayley de \mathbb{Z} engendré par $S = \{1\}$
- (iii) Le graphe de Cayley de \mathbb{Z} engendré par $S = \{1, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Comme on le voit sur les derniers exemples, le graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ *dépend* de la partie S .

Métrie sur le graphe de Cayley. On décide que chaque arête du graphe est isométrique à l'intervalle $[0, 1]$. La distance entre deux points dans $\text{Cay}(G, S)$ est la longueur du plus petit chemin qui les relie. En particulier si $g_1, g_2 \in G$ sont deux sommets de $\text{Cay}(G, S)$ alors $d(g_1, g_2) = m$ où m est le plus petit entier tel que

$$g_1^{-1} g_2 = s_1 s_2 \dots s_m,$$

avec $s_i \in S \cup S^{-1}$. On parle aussi de *métrie des mots* sur G .

Action de groupe sur le graphe de Cayley. Le groupe G agit naturellement à gauche sur G : l'action à gauche de G sur lui-même définit une action de G sur l'ensemble des sommets de $\text{Cay}(G, S)$. Cette action préserve la structure de graphe (elle envoie arête sur arête). En particulier G agit par *isométries* sur $\text{Cay}(G, S)$.

Digression sur les graphes. Dans certains cas il est commode d'utiliser une définition plus formelle de graphe.

Définition 1.3. Un *graphe* (non orienté) est la donnée d'une paire $\Gamma = (V, E)$ muni de

- (i) deux applications $o: E \rightarrow V$ et $t: E \rightarrow V$,
- (ii) une involution sans points fixes $E \rightarrow E$, notée $e \rightarrow \bar{e}$,

telles que pour tout $e \in E$, on a $o(\bar{e}) = t(e)$.

Dans ce contexte, V est l'*ensemble des sommets*, E est l'*ensemble des arrêtes*. On pense aux arrêtes comme des arrêtes orientées. L'involution $e \rightarrow \bar{e}$ renverse l'orientation. Puisque chaque arrête vient e vient avec son arrête opposée \bar{e} , le graphe est un graphe non orienté. L'application $o: E \rightarrow V$ donne le sommet *origine* de e et $t: E \rightarrow V$ donne le sommet *terminal*.

Dans ce cadre le graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ se décrit de la manière suivante. L'ensemble des sommets est $V = G$. L'ensemble des arrêtes est $E = G \times (S \cup S^{-1})$. Les applications $o: E \rightarrow V$ et $t: E \rightarrow V$ sont définies de la manière suivante : $o(g, s) = g$ et $t(g, s) = gs$. L'involution $e \rightarrow \bar{e}$ qui renverse l'orientation des arrêtes est donnée par $(g, s) \rightarrow (gs, s^{-1})$.

1.2 Quasi-isométries.

Problématique. Le graphe Cayley d'un groupe G dépend de la partie génératrice S choisie. On souhaiterait « identifier » deux graphes de Cayley s'il l'un est une « déformation raisonnable » de l'autre et vice versa.

Définition 1.4. Une application $f: X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques est *Lipschitz à large échelle* s'il existe $A \geq 1$ et $B \geq 0$ tels que pour tout $x, x' \in X$ on a

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq Ad_X(x, x') + B$$

On dit que f est une *quasi-isométrie* s'il existe une application $g: Y \rightarrow X$ qui est Lipschitz à large échelle et une constante $C \geq 0$ telles que pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a

$$d(g \circ f(x), x) \leq C \quad \text{et} \quad d(f \circ g(y), y) \leq C.$$

Exercice 1.5. Une application $f: X \rightarrow Y$ est

- (i) un *plongement quasi-isométrique* s'il existe $A \geq 1$ et $B \geq 0$ tel que pour tout $x, x' \in X$ on a

$$\frac{1}{A}d_X(x, x') - B \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Ad_X(x, x') + B$$

- (ii) *quasi-surjective* s'il existe C tel que tout point de Y est à distance au plus C d'un point de $f(X)$.

Montrer que $f: X \rightarrow Y$ est une quasi-isométrie si et seulement si c'est un plongement quasi-isométrique quasi-surjectif.

On dit que deux espace X et Y sont *quasi-isométriques* s'il existe une quasi-isométrie de X vers Y .

Exercice 1.6. Montrer que « être quasi-isométrique » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces métriques.

Exemples.

- (i) Toute ensemble borné est quasi-isométrique à un point.
- (ii) \mathbb{R} et \mathbb{Q} sont quasi-isométriques.
- (iii) $\mathbb{R} \times [0, 1]$ est \mathbb{R} sont quasi-isométriques.
- (iv) \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont *pas* quasi-isométriques (exercice!)

Proposition 1.7. *Soit G un groupe de type fini. Si S et T sont deux parties génératrices de G alors $\text{Cay}(G, S)$ et $\text{Cay}(G, T)$ sont quasi-isométriques.*

Démonstration. Pour simplifier on notera d_S et d_T les distances respectives des graphes $\text{Cay}(G, S)$ et $\text{Cay}(G, T)$. En utilisant l'exercice 1.5 on voit que (G, d_S) est quasi-isométrique à $\text{Cay}(G, S)$. De même avec T . Il suffit donc de montrer que (G, d_1) et (G, d_2) sont quasi-isométriques. Puisque T est fini on peut poser

$$C = \max_{t \in T \cup T^{-1}} d_S(1, t).$$

Soient $g_1, g_2 \in G$. Par définition $d_T(g_1, g_2)$ est le plus petit entier m de sorte que $g_1^{-1}g_2 = t_1 t_2 \dots t_m$ avec $t_i \in T \cup T^{-1}$. En utilisant l'inégalité triangulaire on voit que

$$d_S(1, g_1^{-1}g_2) \leq \sum_{i=1}^m d_S(t_1 \dots t_{i-1}, t_1 \dots t_i).$$

(Par convention le produit vide représente l'élément neutre.) Puisque G agit par isométries à gauche sur $\text{Cay}(G, S)$ on en déduit que

$$d_S(g_1, g_2) = d_S(1, g_1^{-1}g_2) \leq \sum_{i=1}^m d_S(t_1 \dots t_{i-1}, t_1 \dots t_i) = \sum_{i=1}^m d_S(1, t_i) \leq Cm$$

Autrement dit pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a

$$d_S(g_1, g_2) \leq Cd_T(g_1, g_2).$$

Ainsi l'identité définit une application Lipschitz de (G, d_S) dans (G, d_T) . Par symétrie, l'identité définit aussi une application Lipschitz de (G, d_T) dans (G, d_S) . La composition de ces deux applications (dans les deux sens) est l'identité (!) Donc (G, d_S) et (G, d_T) sont quasi-isométriques. \square

Remarque. Contrairement à l'exemple qui apparaît dans la preuve précédente, une quasi-isométrie entre deux groupes n'est pas tenu de respecter la loi de groupe.

Philosophie. Lorsqu'on souhaite définir une notion géométrique sur un groupe G à partir de son graphe de Cayley, on cherche de préférence une notion invariante par quasi-isométrie. Ainsi cette définition ne dépend pas du graphe de Cayley mais uniquement du groupe.

Une autre source de quasi-isométrie. On se donne un espace métrique (X, d) . Un *chemin* entre deux points $x, y \in X$ est une application continue $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ telle que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. Une *géodésique* dans X est un chemin $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ tel que pour tout $s, t \in I$ on a $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$. L'espace X est *géodésique* si deux points quelconques de X sont reliés par une géodésique (on notera que cette géodésique n'est pas forcément unique). On dit que X est *propre* si toutes les boules fermées de X sont compactes.

Soit G un groupe agissant sur X . On dit que l'action de G sur X est

- (i) *proprement discontinue* si pour tout pour toute partie compacte $K \subset X$, l'ensemble $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini,
- (ii) *co-compacte* s'il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $G \cdot K$ recouvre X .

Proposition 1.8 (Lemme de Milnor-Švarc). *Soit (X, d) un espace géodésique propre. Soit G un groupe agissant par isométries sur X . Si l'action de G sur X est proprement discontinue et co-compacte alors G est de type fini. En outre, pour tout $x \in X$, l'application $G \rightarrow X$ qui envoie g sur gx est une quasi-isométrie.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Puisque X est propre et que l'action de G sur X est co-compacte, il existe $r \geq 0$ tel que $G \cdot \bar{B}(x, r)$ recouvre X . On note alors $S = \{g \in G \mid g\bar{B}(x, 2r) \cap \bar{B}(x, 2r) \neq \emptyset\}$. Puisque l'action de G sur X est proprement discontinue, S est fini. En outre $S = S^{-1}$.

Montrons que S engendre G . Soit $g \in G$. On se donne une géodésique $\gamma[a, b] \rightarrow X$ entre x et gx . On fixe une subdivision $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$ de $[a, b]$ de sorte que $d(t_i, t_{i+1}) = r$ pour tout $i \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$ et $d(t_{m-1}, t_m) < r$. Comme $G \cdot \bar{B}(x, r)$ recouvre X , pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, il existe $g_i \in G$, tel que $d(g_i x, \gamma(t_i)) \leq r$. Sans perte de généralité, on peut prendre $g_0 = 1$ et $g_m = g$. Puisque γ est une géodésique l'inégalité triangulaire entraîne que pour tout $i \in \llbracket 0, m_1 \rrbracket$

$$d(g_i^{-1} g_{i+1} x, x) = d(g_{i+1} x, g_i x) \leq d(g_{i+1} x, \gamma(t_{i+1})) + d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), g_i x) \leq 3r.$$

En particulier $g_i^{-1} g_{i+1}$ est un élément de S . Rappelons que $g_0 = 1$ et $g_m = g$. Ainsi

$$g = g_0^{-1} g_m = (g_0^{-1} g_1) (g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{m-1}^{-1} g_m)$$

Autrement dit g s'écrit comme un mot sur l'alphabet S , donc S engendre G . Notons d_S la métrique des mots sur G relativement à S . On observe au passage que

$$d_S(1, g) \leq m \leq \frac{1}{r} d(x, gx) + 1 \tag{1}$$

On s'intéresse maintenant à l'application $G \rightarrow X$, $g \mapsto gx$. Comme $G \cdot \bar{B}(x, r)$ recouvre X , cette application est quasi-surjective. Il suffit donc de montrer que c'est une plongement quasi-isométrique. On remarque d'abord que (1) entraîne que pour tout $g_1, g_2 \in G$,

$$rd_S(g_1, g_2) - r \leq d(g_1 x, g_2 x)$$

On s'intéresse maintenant à l'autre inégalité. On pose

$$C = \max_{s \in S} d(x, sx).$$

Soient $g_1, g_2 \in G$. On pose $m = d_S(g_1, g_2)$ ce qui signifie que l'on peut écrire $g_2 = g_1 s_1 s_2 \dots s_m$ ou $s_m \in S$. L'inégalité triangulaire nous dit alors que

$$d(g_1 x, g_2 x) \leq \sum_{i=1}^m d(g_1 s_1 \dots s_{i-1} x, g_1 s_1 \dots s_i x) = \sum_{i=1}^m d(x, s_i x) \leq C m = C d_S(g_1, g_2).$$

(Il est recommandé de faire un dessin plutôt que de suivre le calcul!) Ainsi pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a

$$r d_S(g_1, g_2) - r \leq d(g_1 x, g_2 x) \leq C d_S(g_1, g_2). \quad \square$$

2 Quelques spécimens dans le bestiaire des groupes

2.1 Groupes libres

Étant donné un ensemble S (pas nécessairement fini) le *groupe libre* engendré par S , que l'on notera $\mathbf{F}(S)$ est défini par la propriété universelle suivante.

Proposition 2.1. *Soit S un ensemble. Il existe une groupe $\mathbf{F}(S)$, unique à isomorphisme près, tel que pour tout groupe G , pour toute application $\varphi: S \rightarrow G$, il existe un unique morphisme de groupe $\psi: \mathbf{F}(S) \rightarrow G$ qui étend φ .*

Si S_1 et S_2 sont deux ensemble de même cardinal alors $\mathbf{F}(S_1)$ et $\mathbf{F}(S_2)$ sont isomorphes. On notera donc \mathbf{F}_r le groupe libre engendré par un ensemble à r éléments. On dit alors que r est le *rang* de \mathbf{F}_r .

Concrètement...

- ▶ On se donne r lettres, x_1, \dots, x_r . Le groupe libre \mathbf{F}_r est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}\}$ qui sont *réduits*, c'est à dire ne contenant pas $x_i x_i^{-1}$ ou $x_i^{-1} x_i$. La loi de groupe est obtenu en concaténant les mots et simplifiant toutes les occurrences de $x_i x_i^{-1}$ ou $x_i^{-1} x_i$.
- ▶ On peut voir aussi le groupe libre \mathbf{F}_r comme le groupe fondamental d'une rose à r -pétales. Plus généralement le groupe fondamental d'un graphe (connexe) Γ est un groupe libre.

Le graphe de Cayley de \mathbf{F}_r est un arbre régulier de valence $2r$. En particulier \mathbf{F}_r agit par isométries sur un arbre... exemple par excellence d'espace à courbure négative!

2.2 Groupes de présentation finie

Soit G un groupe. Si S est une partie génératrice de G alors G est un quotient de $\mathbf{F}(S)$.

Définition 2.2. Un groupe G est de *présentation finie* s'il existe un ensemble fini S et une partie finie $R \subset \mathbf{F}(S)$ tel que G est isomorphe au quotient $\mathbf{F}(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$. On dit alors que $\langle S \mid R \rangle$ est une *présentation finie* de G .

Exemples

- (i) $\mathbf{F}(S) = \langle S \mid \emptyset \rangle$.
- (ii) $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid [a, b] \rangle$. On peut aussi écrire $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$.
- (iii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$.
- (iv) $\mathbf{D}_n = \langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^n \rangle = \langle s, r \mid s^2, (sr)^2, r^n \rangle$.
- (v) Une présentation du groupe d'Heisenberg discret est l'ensemble des matrices

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & p & r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid p, q, r \in \mathbb{Z} \right\}$$

Une présentation de ce groupe est $\langle a, b, c \mid c = [a, b], [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$.

2.3 Groupes de surfaces

Cf. cours de Ludovic Marquis.

Soit $g \in \mathbb{N}$. Soit Σ une surface de genre g . Une présentation du groupe fondamental de Σ est

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Le revêtement universel de Σ est

- (i) La sphère de dimension 2 si $g = 0$.
- (ii) Le plan euclidien \mathbb{R}^2 si $g = 1$.
- (iii) Le plan hyperbolique \mathbb{H}_2 si $g \geq 2$.

Supposons que $g \geq 2$. Le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma)$ agit sur \mathbb{H}_2 de manière proprement discontinue et co-compacte. Aussi $\pi_1(\Sigma)$ et \mathbb{H}_2 sont quasi-isométriques... un autre exemple où la courbure négative pointe sont nez.

3 Action de groupe sur un arbre

3.1 Définitions

Arbre simplicial. Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe. Un *circuit* est une suite d'arrêtes e_1, e_2, \dots, e_m telles que pour tout $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, on a $t(e_i) = o(e_{i+1})$ (les arrêtes s'enchainent) et $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ (on ne rebrousse pas chemin).

Définition 3.1. Un *arbre simplicial* est un graphe connexe sans circuit.

Le graphe de Cayley $\text{Cay}(\mathbf{F}(S), S)$ du groupe libre $\mathbf{F}(S)$ engendré par S est un arbre.

Arbre réel. Dans la suite du cours on sera amené à regarder des formes plus générales d'arbres. Soit X un espace métrique. Étant donnés deux points $x, x' \in X$, un *arc* de x à x' est un homéomorphisme $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = x'$. Si $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est un homéomorphisme croissant, l'application $\gamma \circ \theta$ est encore un arc avec la même image que γ . On dira que $\gamma \circ \theta$ est une reparamétrisation de γ .

Définition 3.2. Un *arbre réel* (*\mathbb{R} -tree* en anglais) est un espace géodésique X tel que toute paire de point $x, x' \in X$ est reliée par un unique arc (à reparamétrisation près).

Il découle de la définition que deux points x et x' dans X sont reliés par une *unique* géodésique. On la note $[x, x']$.

Exemples.

- (i) Un arbre simplicial est un arbre réel.
- (ii) La *métrique SNCF* d_* sur \mathbb{R}^2 est définie de la manière suivante. On note O l'origine de \mathbb{R}^2 . Soient P et Q deux points de \mathbb{R}^2 . Si O, P et Q sont alignés on définit que $d_*(P, Q) = d(P, Q)$. Sinon on pose $d_*(P, Q) = d(P, O) + d(O, Q)$. (Pour aller de Rennes à Marseille en train... il faut passer par Paris!) Le plan \mathbb{R}^2 muni de la métrique SNCF est un arbre réel.
- (iii) Notons $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . On muni X de la métrique de longueur induite par celle de \mathbb{R}^2 . Alors X est un arbre réel, mais ce n'est pas un arbre simplicial (les points de branchement sont denses le long de $\mathbb{R} \times \{0\}$).

Todo. Faire les dessins qui vont avec...

Exercice 3.3. Soit X un arbre réel et $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ un chemin continu, localement injectif. Montrer que γ est un arc de X .

Exercice 3.4. Soient x, y et z trois points d'un arbre réel X . Si y est le seul point commun entre $[x, y]$ et $[y, z]$ alors la concaténation de $[x, y]$ et $[y, z]$ est la géodésique entre x et z .

Définition 3.5. Soit X un arbre réel. Un *sous-arbre* est une partie convexe Y de X , c'est à dire telle que pour tout $y, y' \in Y$, la géodésique $[y, y']$ est entièrement contenue dans Y .

Par exemple une géodésique de X est un sous-arbre.

Exercice 3.6. Soit Y un sous-arbre fermé d'un arbre réel X . Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe une unique point $y \in Y$ tel que $d(x, y) = d(x, Y)$. On appellera ce point la *projection de x sur Y* .

3.2 Exemples d'action sur un arbre

Groupes libres Si G est un groupe agissant sur un espace X , on dit que l'action est *libre* si pour tout point $x \in X$, le stabilisateur de x dans G , c'est à dire le sous-groupe

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

est trivial.

Soit S un ensemble quelconque. Le groupe libre $\mathbf{F}(S)$ agit librement par isométries sur son graphe de Cayley $\text{Cay}(\mathbf{F}(S), S)$ qui est un arbre. Cet énoncé admet une réciproque.

Théorème 3.7. *Soit T un arbre simplicial et G un groupe agissant par isométries sur T . Si l'action de G sur T est libre alors G est un groupe libre.*

Esquisse de preuve. Puisque T est un arbre, son groupe fondamental est trivial. Par ailleurs G préserve la structure de graphe de X . On note $\Gamma = T/G$ le graphe quotient correspondant. Comme G agit librement sur X , la projection canonique $T \rightarrow \Gamma$ est en fait un revêtement. C'est même un revêtement universel puisque X est simplement connexe. Il en résulte que G est le groupe fondamental de Γ , donc un groupe libre. \square

Corollaire 3.8. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.*

Démonstration. En effet si G est un groupe libre alors il agit librement sur un arbre T (par exemple son graphe de Cayley pour une partie génératrice appropriée). Tout sous-groupe H de G agit a fortiori sans point fixe sur T . D'après le théorème précédent, H est un groupe libre. \square

Produit libre. Comme le groupe libre, le produit libre $A_1 * A_2$ de deux groupes A_1 et A_2 est défini par une propriété universelle.

Proposition 3.9. *Soient A_1 et A_2 deux groupes. Il existe un groupe $A_1 * A_2$, unique à isomorphisme près ainsi que deux plongements $\iota_1: A_1 \rightarrow A_1 * A_2$ et $\iota_2: A_2 \rightarrow A_1 * A_2$ vérifiant la propriété suivante. Soient G un groupe. Soient $\varphi_1: A_1 \rightarrow G$ et $\varphi_2: A_2 \rightarrow G$ deux morphismes de groupes. Il existe un unique morphisme de groupe $\psi: A_1 * A_2 \rightarrow G$ tel que $\psi \circ \iota_1 = \varphi_1$ et $\psi \circ \iota_2 = \varphi_2$.*

Faire le diagramme commutatif...

Vocabulaire. On dit que A_1 et A_2 sont des *facteurs libres* de $A_1 * A_2$.

Démonstration. On commence par construire $A_1 * A_2$. Pour cela, on note \mathcal{W} l'ensemble des suites finies (a_1, a_2, \dots, a_m) de longueur quelconque où chaque a_i est un élément de A_1 ou A_2 . On autorise la suite vide que l'on note ε . Si w et w' sont deux éléments de \mathcal{W} on note ww' leur concaténation. La concaténation définit une loi d'opération interne associative sur \mathcal{W} dont le neutre est ε . On définit maintenant une relation binaire sur \mathcal{W} de la manière suivante. On commence par des « relations élémentaires ». On pose d'abord que

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m) \sim (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m)$$

si a_k et a_{k+1} sont tous les deux dans A_1 ou tous les deux dans A_2 . De même

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) \sim (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m)$$

si a_i est l'élément neutre de A_1 ou de A_2 . On dit maintenant que deux suites $w, w' \in \mathcal{W}$ sont en relation et on note $w \equiv w'$ s'il existe une suite $w = w_0, w_1, \dots, w_p = w'$ d'éléments de \mathcal{W} telle que pour tout $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, on a $w_j \sim w_{j+1}$. On observe que la relation \equiv ainsi définie est une relation d'équivalence. On définit $A_1 * A_2$ comme le quotient \mathcal{W} / \equiv . On vérifie que \equiv est compatible avec la concaténation, c'est à dire, si w_1, w_2 et w sont trois éléments de \mathcal{W} avec $w_1 \equiv w_2$ alors $ww_1 \equiv ww_2$ et $w_1w \equiv w_2w$. Il en résulte que la concaténation induit une loi d'opération interne sur $A_1 * A_2$ qui est associative et dont le neutre est $[\varepsilon]$. Tout élément de $A_1 * A_2$ admet un inverse : en effet l'inverse de $[a_1, \dots, a_m]$ est $[a_m^{-1}, \dots, a_1^{-1}]$. Par conséquent $A_1 * A_2$ est un groupe. L'application $\iota_i : A_i \rightarrow A_1 * A_2$ qui envoie a sur $[a]$ est un morphisme de groupe.

On montre maintenant que $A_1 * A_2$ vérifie la propriété universelle. Pour cela on se donne un groupe G ainsi que deux morphismes $\varphi_1 : A_1 \rightarrow G$ et $\varphi_2 : A_2 \rightarrow G$. On commence par définir une application $\psi : \mathcal{W} \rightarrow G$ de la manière suivante. Si $w = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ est une suite de \mathcal{W} , alors

$$\psi(w) = \varphi_{i_1}(a_1)\varphi_{i_2}(a_2) \dots \varphi_{i_m}(a_m).$$

où i_k vaut 1 ou 2 selon que a_k appartient à A_1 ou A_2 . Observons que si w et w' sont deux éléments de \mathcal{W} alors $\psi(ww') = \psi(w)\psi(w')$. Par ailleurs si w et w' sont équivalents, alors $\psi(w) = \psi(w')$. Par conséquent ψ induit un morphisme de groupe de $A_1 * A_2 \rightarrow G$ que par abus de notation on notera encore ψ . On vérifie aisément que $\psi \circ \iota_i = \varphi_i$. On a donc démontré l'existence de l'application ψ . Montrons maintenant son unicité. On se donne maintenant un élément $g = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ de $A_1 * A_2$. Remarquons que

$$g = [a_1][a_2] \dots [a_m] = \iota_{i_1}(a_1)\iota_{i_2}(a_2) \dots \iota_{i_m}(a_m),$$

où i_k vaut 1 ou 2 selon que a_k appartient à A_1 ou A_2 . Si $\psi : A_1 * A_2$ est un morphisme de groupe tel que $\psi \circ \iota_1 = \varphi_1$ et $\psi \circ \iota_2 = \varphi_2$, alors nécessairement

$$\psi(g) = \left(\psi \circ \iota_{i_1}(a_1)\right) \left(\psi \circ \iota_{i_2}(a_2)\right) \dots \left(\psi \circ \iota_{i_m}(a_m)\right) = \varphi_{i_1}(a_1)\varphi_{i_2}(a_2) \dots \varphi_{i_m}(a_m).$$

Il n'y a donc qu'une seule manière de définir $\psi(g)$.

On n'a pas encore montré que les applications $\iota_i : A_i \rightarrow A_1 * A_2$ étaient injectives. Cela découle de la propriété universelle. Prenons en effet $\varphi_1 = \text{Id}_{A_1}$ (l'identité de A_1) et $\varphi_2 : A_2 \rightarrow A_1$ le morphisme trivial (qui envoie tous les éléments sur l'élément neutre). La propriété universelle nous donne un morphisme $\psi : A_1 * A_2 \rightarrow A_1$ qui vérifie en particulier $\psi \circ \iota_1 = \text{Id}_{A_1}$. Donc ι_1 est injective. Par symétrie, ι_2 aussi.

L'unicité (à isomorphisme près) du groupe $A_1 * A_2$ est une conséquence de la propriété universelle. \square

Exemples

- (i) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbf{F}_2$. Plus généralement $\mathbf{F}_r * \mathbb{Z} = \mathbf{F}_{r+1}$.
- (ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbf{D}_\infty$ (le groupe diédral infini, autrement dit le groupe d'isométries de \mathbb{Z})
- (iii) $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3 = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. On rappelle au passage que $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ agit par isométries sur \mathbb{H}_2 (cf cours de Ludovic Marquis).

(iv) Théorème de Van Kampen.

Proposition 3.10 (Forme normale). *Soient A_1 et A_2 deux groupes. Tout élément $g \in A_1 * A_2$ s'écrit de manière unique comme un produit $g = a_1 a_2 \dots a_m$ tel que*

(i) *chaque lettre a_k est un élément non trivial de A_1 ou A_2 .*

(ii) *deux lettres consécutives ne sont pas dans le même facteur.*

Démonstration. L'existence de la forme normale est évidente. En effet $A_1 * A_2$ est engendré par A_1 et A_2 . Le point clef de la proposition est l'unicité. La preuve repose sur une utilisation astucieuse de la propriété universelle. Notons \mathcal{M} l'ensemble des suites (a_1, \dots, a_m) de longueur finie quelconque telles que

(i) chaque lettre a_k est un élément *non trivial* de A_1 ou A_2 .

(ii) deux lettres consécutives ne sont pas dans le même facteur.

On autorise la suite vide notée ε . On va définir une action de A_1 sur \mathcal{M} . Pour cela on note \mathcal{M}_2 , le sous-ensemble de \mathcal{M} composé des suites (a_1, \dots, a_m) qui débutent pas un élément (non trivial) de A_2 . Par convention on demande que ε soit dans \mathcal{M}_2 . On remarque que l'on peut identifier \mathcal{M} avec $A_1 \times \mathcal{M}_2$. La bijection est donnée par

$$\begin{aligned} A_1 \times \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathcal{M} \\ (a, (a_1, \dots, a_m)) &\rightarrow \begin{cases} (a_1, \dots, a_m) & \text{if } a = 1 \\ (a, a_1, \dots, a_m) & \text{if } a \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut donc faire agir A_1 à gauche sur \mathcal{M} par multiplication à gauche sur le premier facteur de $A_1 \times \mathcal{M}_2$. Concrètement, si $a \in A_1$ et $w = (a_1, \dots, a_m)$ appartient à \mathcal{M} alors deux cas sont possible, soit a_1 est dans A_2 et on ajoute a au début de la suite w . Soit a_1 est dans A_1 auquel cas on calcule le produit aa_1 , si celui ci est trivial, on retire a_1 de w , sinon on remplace a_1 par aa_1 dans w . De la même façon on définit une action à gauche de A_2 sur \mathcal{M} . Si on note $\mathfrak{S}(\mathcal{M})$ le groupe des permutations de \mathcal{M} , on a donc deux morphismes de groupes $A_1 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{M})$ et $A_2 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{M})$. D'après la propriété universelle qui définit le produit libre, il existe un unique morphisme de groupe $A_1 * A_2 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{M})$ qui étend ces deux morphismes. Autrement dit, il existe une unique action de $A_1 * A_2$ sur \mathcal{M} qui étend celle de A_1 et A_2 . Si $g \in A_1 * A_2$ et $w \in \mathcal{M}$, on notera $g \cdot w$ l'image de w par g . On se donne alors deux applications

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow \mathcal{M} & \psi: \mathcal{M} &\rightarrow G \\ g &\rightarrow g \cdot \varepsilon & (a_1, a_2, \dots, a_m) &\rightarrow a_1 a_2 \dots a_m \end{aligned}$$

On remarque que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{M}}$. Par conséquent ψ est injective, ce qui signifie exactement que la forme normale est unique. \square

Une des manière d'étudier le produit libre $A_1 * A_2$ est de le faire agir sur un arbre dont on va expliquer maintenant la construction. Pour simplifier les notations on note $G = A_1 * A_2$. On construit un graphe T de la manière suivante.

- ▶ L'ensemble V de ses sommets est l'union disjoints de $V_1 = G/A_1$ et $V_2 = G/A_2$.
- ▶ Pour tout $g \in G$ on relie par une arête les images respectives de g dans V_1 et V_2 .

L'action à gauche de G sur V_1 et V_2 induit une action à gauche de G sur T qui préserve la structure de graphe. On notera que A_i fixe le sommet x_i qui correspond à la classe 1 dans V_i .

Remarque. Si on souhaite formaliser la définition de T on posera

$$V = G/A_1 \sqcup G/A_2 \quad \text{et} \quad E = G \times \{\pm 1\}.$$

L'involution $e \rightarrow \bar{e}$ sur l'ensemble des arrêtes est donnée par $(g, \varepsilon) \rightarrow (g, -\varepsilon)$. Les applications d'origine $o: E \rightarrow V$ et terminaisons $t: E \rightarrow V$ sont les suivantes

$$o(g, \varepsilon) = \begin{cases} \text{la classe de } g \text{ dans } V_1 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \text{la classe de } g \text{ dans } V_2 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad t(g, \varepsilon) = \begin{cases} \text{la classe de } g \text{ dans } V_2 & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \text{la classe de } g \text{ dans } V_1 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

Ce formalisme permet d'écrire une preuve rigoureuse du résultat ci-dessous... mais rien de vaut toutefois un bon dessin pour s'en convaincre.

Proposition 3.11. *Le graphe T est un arbre simplicial.*

Démonstration. On note x_1 et x_2 les sommets du graphe correspondant à la classe de 1 dans $V_1 = G/A_1$ et $V_2 = G/A_2$ respectivement. Ces sommets sont reliés par l'arrête $e = (1, +1)$ (autrement dit cette arrête est orientée de x_1 vers x_2). On commence par montrer que T est connexe. Le groupe G permute les composantes connexes de T . On appelle T_0 la composante connexe de T contenant e . Si a est un élément de A_1 , il fixe x_1 . En particulier il envoie e sur une arrête issue de x_1 . Par conséquent ae est dans la même composante connexe que e , donc $aT_0 = T_0$. Il en découle que A_1 préserve T_0 . De la même manière A_2 préserve T_0 . Or A_1 et A_2 engendrent G . Donc G préserve T_0 . Or toute arrête de T est dans l'orbite sous G de e (ou \bar{e}). Donc $T \subset T_0$. L'autre inclusion étant évidente, T n'a qu'une seule composante connexe.

On va maintenant montrer que T est sans circuit. C'est une conséquence de l'unicité de la forme normale. Supposons au contraire que T contient un circuit $e_1 e_2 \dots e_m$. Quitte à traduire ce circuit et renverser son orientation, on peut supposer que $e_1 = e$. Notons que m est nécessairement paire. En effet le sommet initial de e_1 est x_1 , celui de e_2 est x_2 . Par conséquent le sommet initial de e_3 est dans V_1 tandis que le sommet initial de e_4 est dans V_2 et ainsi de suite. Pour que le circuit boucle, le nombre d'arrête est nécessairement paire. De la même manière on observe qu'il existe (un unique) $g_k \in G$ tel que e_k s'écrit $e_k = g_k e$ si k est impaire et $e_k = g_k \bar{e}$ si k est paire (on notera que g_1 est trivial). Notons y_k le sommet terminal de e_k , qui est aussi le sommet initial de e_{k+1} . C'est un sommet dans V_{i_k} où i_k vaut 1 si k est pair et 2 sinon. Par définition de la relation d'adjacence dans T , y_k et y_{k+1} ont la même image dans A_{i_k} . Autrement dit il existe $a_k \in A_{i_k}$ tel que $y_{k+1} = g_k a_k$. Puisque $e_{k+1} \neq \bar{e}_k$, l'élément a_k est nécessairement non trivial. Par conséquent $g_k = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$. Dire que $e_1 e_2 \dots e_m$ est un circuit peut s'écrire

$$g_{m+1} e = e_{m+1} = e_1 = e$$

Il en résulte que $a_1 \dots a_m = 1$. On rappelle que deux lettres consécutives de ce mot ne sont pas dans le même facteur libre. Ceci contredit l'unicité de la forme normale ([Proposition 3.10](#)). Ainsi T ne contient pas de circuit et donc est un arbre. \square

Le produit libre de deux groupes n'est que la partie émergée de la *théorie de Bass-Serre* qui décrit en terme de produit amalgamés et extensions HNN comment un groupe G peut agir un arbre simplicial. Le lecteur curieux pourra consulter le livre de Serre [12].

3.3 Isométries d'un arbre

A partir de maintenant on fixe un arbre réel T . Si g est une isométrie de T on « mesure » son action grâce à la *longueur de translation* définie comme suit

$$\|g\| = \inf_{x \in T} d(gx, x).$$

Par ailleurs on associe à g un *ensemble caractéristique* C_g qui est l'ensemble des points ayant un déplacement minimal. Autrement dit

$$C_g = \{x \in X \mid d(gx, x) = \|g\|\}.$$

A priori C_g peut être vide (si l'infimum n'est pas atteint). L'énoncé ci-dessous nous dit que ce n'est jamais le cas.

Proposition 3.12. *Soit g une isométrie d'un arbre réel X . L'ensemble caractéristique C_g est un sous-arbre fermé non vide de X invariant par g . En outre, l'une des deux affirmations suivantes est vraie.*

- (i) *Soit $\|g\| = 0$ et C_g est l'ensemble des points fixes de g*
- (ii) *Soit $\|g\| > 0$ et C_g est une géodésique bi-infinie de X sur laquelle g agit par translation de longueur $\|g\|$.*

Vocabulaire. Dans le contexte des arbres, on dit que g est *elliptique* si $\|g\| = 0$ et *loxodromique* sinon. Dans la littérature, on trouve parfois le terme *hyperbolique* comme synonyme de loxodromique.

Notation. On introduit une notation bien commode pour la preuve. Étant donnés trois points x, y, z de X , le *produit de Gromov* de y et z basé en x est défini comme

$$\langle y, z \rangle_x = \frac{1}{2} [d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)]$$

Ce produit de Gromov mesure le défaut de l'inégalité triangulaire. Dans un arbre, il s'interprète géométriquement comme la distance du point x à la géodésique $[y, z]$. On observe que

$$0 \leq \langle y, z \rangle_x \leq \min \{d(x, y), d(x, z)\}.$$

On verra plus tard que le produit de Gromov joue un rôle crucial dans la définition des espaces hyperboliques.

Démonstration. Le sous-ensemble C_g est clairement fermé et invariant sous l'action de g .

On se donne maintenant un point $x \in X$ quelconque. On distingue deux cas. Supposons dans un premier temps que

$$\langle g^{-1}x, gx \rangle_x \geq \frac{1}{2}d(gx, x).$$

On observe alors que le milieu m de $[x, gx]$ est fixé par g . (Faire un dessin!) Par conséquent $\|g\| = 0$ et C_g est non vide. Dans ce cas C_g est l'ensemble des points fixes de g . En particulier C_g est un

sous-arbre. En effet, supposons que y et y' sont deux points fixes par g . Puisque la géodésique entre y et y' est unique, $g[y, y']$ coïncide avec $[y, y']$ et donc g fixe $[y, y']$ point à point.

Supposons maintenant que

$$\langle g^{-1}x, gx \rangle_x < \frac{1}{2}d(gx, x).$$

On note alors p le point de $[x, gx]$ tel que $d(x, p) = \langle g^{-1}x, gx \rangle_x$. On observe alors que gp est aussi sur la géodésique $[x, gx]$ à distance $\langle g^{-1}x, gx \rangle_x$ de gx . En outre, gp est le seul point commun entre les géodésiques $[p, gp]$ et $[gp, g^2p]$. (Faire à nouveau un dessin!) Aussi leur concaténation est la géodésique entre p et g^2p . De proche en proche l'union des segments $g^k[p, gp]$ pour $k \in \mathbb{Z}$ est une géodésique bi-infinie que l'on notera $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$. L'isométrie g agit sur γ par translation de longueur $T = d(gp, p)$. On va maintenant montrer que $T = \|g\|$ et C_g coïncide avec γ .

Par définition, $T \geq \|g\|$. Soit y un point de X et q sa projection sur γ . Le point gq (distinct de q car $T > 0$) est la projection de gy sur γ . On observe que la réunion $[y, q] \cup [q, gq] \cup [gq, gy]$ est localement injectif. Autrement dit c'est une géodésique. Par conséquent

$$d(gy, y) \geq 2d(q, \gamma) + d(gq, q) \geq T \quad (2)$$

Cette inégalité est vraie pour tout $y \in X$. En prenant l'infimum, on obtient que $T = \|g\|$. En particulier, γ est contenu dans C_g . L'inégalité (2) nous dit en outre que si y appartient à C_g alors $d(y, \gamma) = 0$. Ainsi C_g et γ coïncident. En particulier C_g est un sous-arbre de X , ce qui termine la preuve. \square

Exercice 3.13. Soit g une isométrie d'un arbre réel X .

- (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\|g^n\| = |n| \cdot \|g\|$.
- (ii) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que g est elliptique (respectivement loxodromique) si et seulement si g^n l'est. Si g est loxodromique, montrer que g et g^n ont le même ensemble caractéristique.

Exercice 3.14. Soit g une isométrie d'un arbre réel. Montrer que pour tout $x \in X$ on a

$$d(gx, x) = 2d(x, C_g) + \|g\|.$$

Décrire la géodésique reliant x et gx .

Corollaire 3.15. Si g est une isométrie d'ordre fini d'un arbre réel alors g est elliptique.

Démonstration. Il découle de la seconde partie de la [Proposition 3.12](#) que tout élément loxodromique est d'ordre infini. Le résultat en découle par contraposé. \square

Corollaire 3.16. Soit A_1 et A_2 deux groupes de type fini. On note $G = A_1 * A_2$ leur produit libre. Tout élément d'ordre fini de G est conjugué à un élément de A_1 ou A_2 . En particulier si A_1 et A_2 sont sans torsion alors G aussi.

Vocabulaire. On dit qu'un groupe est *sans torsion* si tous ses éléments sont d'ordre infini.

Démonstration. Soit g un élément d'ordre fini de $G \setminus \{1\}$. On note T l'arbre associé à G construit dans la Proposition 3.11. D'après le corollaire précédent g est une isométrie elliptique de T , donc fixe un point de T . Le stabilisateur dans G d'un point contenu dans l'intérieur d'une arête est toujours trivial. Donc g fixe un sommet x dans $V_1 = G/A_1$ ou $V_2 = G/A_2$. Suppose que x soit un élément de V_1 (l'autre cas est symétrique). Le sommets x correspond à la classe uA_1 pour un certain $u \in G$, tandis que gx est la classe de guA_1 . Dire que $gx = x$ équivaut à $guA_1 = uA_1$. Il existe donc $a \in A_1$ tel que $guua$. Par conséquent $g = uau^{-1}$ est conjugué à un élément de A_1 . \square

Exercice 3.17. Soient A et B deux groupes finis. Montrer que $A * B$ est *virtuellement libre*, c'est à dire qu'il contient un sous-groupe libre d'indice fini. (Hint : montrer que le noyau du morphisme $A * B \rightarrow A \times B$ agit libre sur un arbre.)

3.4 Lemme de Serre

On propose une suite d'exercices dont l'objectif est de montrer le résultat suivant.

Proposition 3.18. Soit X un arbre réel muni d'une action par isométries d'un groupe G . Soit S une partie génératrice finie de G . On suppose que pour tout $s_1, s_2 \in S$, les éléments s_1, s_2 et s_1s_2 sont d'ordre fini. Alors il existe un point $x \in X$ qui est fixé par tous les éléments de G .

Dans toute la suite X est un arbre réel.

- (i) Soit Y_1, Y_2, \dots, Y_m une famille finie de sous-arbre fermés de X , tels que pour tout i, j l'intersection $Y_i \cap Y_j$ est non vide. Montrer que $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_m$ est non vide. (Hint : faire une récurrence sur m .)
- (ii) Soient g_1 et g_2 deux isométries elliptiques. Pour simplifier on note C_1 et C_2 leurs ensembles caractéristiques respectifs. Montrer que si $C_1 \cap C_2$ est vide alors g_2g_1 est loxodromique. (Hint : considérer la projection p sur C_2 d'un point $x \in C_1$ et montrer que g_2g_1 ne peut pas fixer le milieu de la géodésique $[x, g_2x]$.)
- (iii) Démontrer la proposition.

4 Espaces hyperboliques (au sens de Gromov)

4.1 Définition et exemples

Dans toute cette partie (X, d) est un espace métrique. Le *produit de Gromov* de trois points $x, y, z \in X$ est la quantité $\langle y, z \rangle_x$ défini par

$$\langle y, z \rangle_x = \frac{1}{2} [d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)].$$

Cette quantité s'interprète géométriquement de la manière suivante. Soit $x^*, y^*, z^* \in \mathbb{R}^2$ trois points du plan tels que

$$d(x, y) = d(x^*, y^*), \quad d(y, z) = d(y^*, z^*) \quad \text{et} \quad d(z, x) = d(z^*, x^*).$$

Un tel triangle dans \mathbb{R}^2 existe toujours et est unique à isométrie près. On note p^* et q^* les points de contact du cercle inscrit du triangle $[x^*, y^*, z^*]$ avec les côtés $[x^*, y^*]$ et $[x^*, z^*]$ respectivement. On a alors

$$\langle y, z \rangle_x = d(x^*, p^*) = d(x^*, q^*).$$

Todo. Faire une figure! Le produit de Gromov mesure le défaut dans l'inégalité triangulaire. On remarque directement que

$$0 \leq \langle y, z \rangle_x \leq \min\{d(x, y), d(x, z)\}.$$

Définition 4.1. Soit $\delta \geq 0$. L'espace (X, d) est δ -hyperbolique si pour tout $x, y, z, t \in X$, on a

$$\langle x, z \rangle_t \geq \min\{\langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t\} - \delta. \quad (3)$$

On dit que (X, d) est *hyperbolique (au sens de Gromov)* s'il existe $\delta \geq 0$ tel que (X, d) est δ -hyperbolique.

Exercice 4.2. Montrer que l'espace (X, d) est δ -hyperbolique si et seulement si pour tout $x, y, z, t \in X$, on a

$$d(x, z) + d(y, t) \leq \max\{d(x, y) + d(z, t), d(x, t) + d(y, z)\} + 2\delta. \quad (4)$$

Hint : retrancher aux deux membres de l'inégalité (3) la quantité $d(x, t) + d(y, t) + d(z, t)$.

Premiers exemples d'espace hyperboliques.

- (i) Tout espace borné est un espace hyperbolique. On rappelle qu'un tel espace est quasi-isométrique à un point. Ce n'est donc pas le type d'exemples qui va beaucoup nous intéresser.
- (ii) Les arbres réels sont 0-hyperboliques. (Faire un dessin)

Un point de vue plus intuitif. L'inégalité à quatre points (3) est très commode quand il s'agit de rédiger des preuves, mais assez peu intuitive. Il existe de nombreuses définitions équivalentes de l'hyperbolicité, qui nous aident à appréhender les espaces hyperboliques. L'une d'elle se formule en termes de triangles « étroits ».

A partir de maintenant on suppose que X est *géodésique*. On rappelle que deux points ne sont pas toujours relié par une unique géodésique. Pourtant on s'autorisera un abus de notation et on

écrivra $[x, y]$ pour désigner une géodésique entre deux points $x, y \in X$. Soit Y une partie de X et $\alpha \geq 0$. Le α -voisinage de Y , noté $Y^{+\alpha}$, est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $d(x, Y) \leq \alpha$. Un triangle géodésique de X est dit δ -étroit si chaque coté est contenu dans le δ -voisinage de la réunion des deux autres.

Proposition 4.3. *Soit (X, d) un espace métrique géodésique.*

- (i) *Si X est δ -hyperbolique, alors tous les triangles géodésiques de X sont 4δ -étroits.*
- (ii) *Si tous les triangles géodésiques de X sont δ -étroits alors X est 3δ -hyperbolique.*

Remarques.

- En pratique, la valeur précise de δ importe assez peu (on est pas à un ou deux δ près). L'important est d'avoir une constante uniforme pour tous les triangles. De ce point de vue la proposition précédente dit essentiellement qu'un espace est hyperbolique si et seulement si ses triangles géodésiques sont uniformément étroits.
- Il faut penser à la constante δ comme une échelle d'observation critique. Si X est δ -hyperbolique, on pourra en déduire de propriétés sur les triangles (ou d'autres figures) dont la « taille » est très grande devant δ . Par contre la condition d'hyperbolicité ne dit rien sur les triangles dont les cotés sont plus petits que δ par exemple.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que (X, d) est δ -hyperbolique. Soient $x, y, z \in X$. On fixe $[x, y]$, $[y, z]$ et $[z, x]$ trois géodésiques reliant ces points. Soient $p \in [x, y]$ et $q \in [x, z]$. On va montrer que

$$d(p, q) \leq \max \{ |d(x, p) - d(x, q)|, d(x, p) + d(x, q) - 2 \langle y, z \rangle_x \} + 4\delta. \quad (5)$$

Cette inégalité est en effet suffisante pour conclure (faire un dessin). Par définition on a

$$d(p, q) = d(x, p) + d(x, q) - 2 \langle p, q \rangle_x. \quad (6)$$

En appliquant deux fois l'inégalité à quatre points (3) on voit que

$$\langle p, q \rangle_x \geq \min \{ \langle p, y \rangle_x, \langle y, z \rangle_x, \langle z, q \rangle_x \} - 2\delta.$$

Si le minimum est atteint par $\langle y, z \rangle_x$, alors notre affirmation découle directement de (6). Supposons que le minimum soit atteint par $\langle p, y \rangle_x$. Puisque de p est sur la géodésique $[x, y]$, on a $\langle p, y \rangle_x = d(x, p)$. Ainsi (6) devient

$$d(p, q) \leq d(x, q) - d(x, p) + 4\delta$$

Notre affirmation est donc vraie. Si le minimum est atteint par $\langle z, q \rangle_x$, la preuve est identique. On a donc terminé la preuve de notre affirmation. Ainsi tous les triangles géodésiques de X sont 4δ -étroits.

On suppose maintenant que tous les triangles géodésiques de X sont δ -étroits. On va commencer par une autre interprétation géométrique du produit de Gromov. Soient $x, y, z \in X$. On fixe une géodésique $[y, z]$ entre y et z . Alors

$$\langle y, z \rangle_x \leq d(x, [y, z]) \leq \langle y, z \rangle_x + 2\delta. \quad (7)$$

Autrement dit, « à une erreur δ près », le produit de Gromov $\langle y, z \rangle_x$ mesure la distance de x au côté $[y, z]$. Pour tout point p sur $[y, z]$, l'inégalité triangulaire nous dit que

$$\langle y, z \rangle_x \leq \frac{1}{2} \left[\left(d(x, p) + d(p, z) \right) + \left(d(x, p) + d(p, z) \right) - \left(d(y, p) + d(p, z) \right) \right] \leq d(x, p)$$

Aussi $\langle y, z \rangle_x \leq d(x, [y, z])$. On va maintenant montrer l'autre inégalité. Pour cela on fixe deux autres géodésiques $[x, y]$ et $[x, z]$. Puisque les triangles de X sont δ -étroits, le côté $[y, z]$ est dans le δ -voisinage de $[x, y] \cup [x, z]$. Aussi, il existe un point p sur $[y, z]$ qui est à distance au plus δ de $[x, y]$ et $[x, z]$. Par conséquent

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq d(x, p) + d(p, y) - 2\delta, \\ d(x, z) &\geq d(x, p) + d(p, z) - 2\delta \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\langle y, z \rangle_x \geq \frac{1}{2} \left[\left(d(x, p) + d(p, z) \right) + \left(d(x, p) + d(p, z) \right) - \left(d(y, p) + d(p, z) \right) \right] - 2\delta \geq d(x, p) - 2\delta.$$

On en déduit directement l'autre inégalité de (7). Montrons maintenant que X est 3δ -hyperbolique. Soient $x, y, z, t \in X$. On fixe des géodésiques $[x, y]$, $[y, z]$, et $[z, x]$. Puisque le triangles $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ est δ -étroit, on a

$$d(t, [x, z]) \geq \min \left\{ d(t, [x, y]), d(t, [y, z]) \right\} - \delta$$

On conclut en combinant cette inégalité avec (7). \square

Remarques.

- ▶ Les preuves qu'on peut trouver dans la littérature, notamment [3] et [8], peuvent paraître plus longues. C'est surtout qu'elles démontrent au passage d'autres définitions équivalentes d'hyperbolicité.
- ▶ Comme on l'a rappelé, deux points $x, y \in X$ peuvent être reliés par *plusieurs* géodésiques. Toutefois deux telles géodésiques forment un triangle dégénéré (dont un des côtés est réduit à un point). Il en résulte que chacune de ces géodésiques est à distance au plus 4δ de l'autre. Autrement dit à une échelle très grande devant δ , on peut faire « comme si » il n'y avait qu'une seule géodésique entre ces points.

D'autres exemples/non-exemples d'espaces hyperboliques.

- ▶ Un modèle possible de l'espace hyperbolique de dimension 2, noté \mathbb{H}_2 , est le demi-plan de Poincaré (Faire un dessin).

$$\mathbb{H}_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

Cet espace est muni d'une distance de l'on peut caractériser de plusieurs manière. D'un point de vue Riemannien on a

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Une autre façon de voir est de dire que si $p_1 = (x_1, y_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2)$ sont deux points de \mathbb{H}_2 alors

$$\operatorname{ch} \left(d(p_1, p_2) \right) = \operatorname{ch}(\ln y_1 - \ln y_2) + \frac{1}{2y_1 y_2} |x_1 - x_2|^2.$$

(Pas sûr que ce soit beaucoup plus éclairant!) Les géodésiques bi-infinies de \mathbb{H}_2 sont des droites verticales, ou des demi cercles qui coupent perpendiculairement l'axe des abscisses. Les triangles de \mathbb{H}_2 vérifie une variation sur le théorème d'Al-Kashi (*law of cosine* en anglais) : étant donné un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b , et c ; on note α , l'angle du sommet opposé au côté de longueur a ; alors

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha.$$

Le plan hyperbolique est une espace hyperbolique au sens de Gromov. Pour une démonstration on pourra voir le cours de Ludovic Marquis.

- Plus généralement. Si X est une variété Riemannienne, simplement connexe dont la courbure sectionnelle K est négativement majorée (c'est à dire qu'il existe $\kappa < 0$ tel que $K \leq \kappa$) alors X est hyperbolique au sens de Gromov. On peut en effet montrer que les triangles de X sont « étroits » que ceux de l'espace hyperbolique renormalisé $a\mathbb{H}_2$ où $a = 1/\sqrt{-\kappa}$. En particulier si M est une variété Riemannienne dont la courbure sectionnelle est négativement majorée, alors son revêtement universel est hyperbolique au sens de Gromov.
- En revanche le plan euclidien \mathbb{R}^2 n'est pas hyperbolique. On y trouve facilement des triangles qui ne sont pas étroits (faire un dessin). Plus généralement l'espace euclidien \mathbb{R}^n est hyperbolique si et seulement si $n \in \{0, 1\}$.

Exercice 4.4. On a déjà observé qu'un arbre réel est un espace 0-hyperbolique. Le but de cet exercice est de montrer la réciproque : si X est un espace géodésique 0-hyperbolique, alors X est un arbre réel. On fixe donc un espace géodésique 0-hyperbolique X .

- (i) Soient $x, y \in X$. On fixe un arc $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ de x vers y et une géodésique $[x, y]$ entre les mêmes points. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la géodésique $[x, y]$ est contenu dans le ε -voisinage de γ . On pourra considérer une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1$ de $[0, 1]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ le diamètre de γ restreint à $[t_i, t_{i+1}]$ est au plus ε et montrer que $[x, y]$ est contenu dans $[\gamma(t_0), \gamma(t_1)] \cup [\gamma(t_1), \gamma(t_2)] \cup \dots \cup [\gamma(t_{m-1}), \gamma(t_m)]$.
- (ii) En déduire que $[x, y]$ est contenu dans γ .
- (iii) Conclure.

4.2 Invariance par quasi-isométries

On aimerait maintenant définir un groupe hyperbolique, comme un groupe de type fini dont le graphe de Cayley est un espace hyperbolique. Toutefois cette définition se heurte à une difficulté. Le graphe de Cayley dépend du système de générateur qu'on se donne. Lequel choisir? Il se trouve que le choix du système de générateur importe peu. En effet, être hyperbolique est une propriété invariante par quasi-isométries. Plus précisément on va montrer le résultat suivant.

Théorème 4.5. *Soit $f: X \rightarrow Y$ un plongement quasi-isométrique entre deux espaces géodésiques. Si Y est hyperbolique, alors X aussi.*

Les deux exemples/exercices suivants sont des cas très simples du théorème ci-dessus.

- (i) Soit $f: X \rightarrow Y$ un plongement $(1, \varepsilon)$ -quasi-isométrique. Si Y est δ -hyperbolique, alors X est δ' -hyperbolique avec $\delta' = \delta + 3\varepsilon$.
- (ii) Soit X un espace métrique. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On note λX l'espace métrique X dont on a renormalisé la distance par λ , c'est à dire que pour tout $x, x' \in X$

$$d_{\lambda X}(x, x') = \lambda d_X(x, x').$$

Si X est δ -hyperbolique alors λX est $\lambda\delta$ -hyperbolique.

En général, la difficulté vient du fait que le coefficient de dilatation d'une quasi-isométrie n'est pas 1, ni même fixe (comme dans le cas d'une renormalisation) mais varie entre deux bornes (A et $1/A$).

La preuve du [Théorème 4.5](#) repose sur une propriété fondamentale des espace hyperboliques : la stabilité des quasi-géodésique (*Morse Lemma* dans la littérature anglophone).

Définition 4.6. Soit $\kappa \geq 1$ et $\ell \geq 0$. Une (κ, ℓ) -quasi-géodésique $\gamma: I \rightarrow X$ est un plongement (κ, ℓ) -quasi-géodésique d'un interval I de \mathbb{R} dans X , c'est à dire que pour tout $s, t \in I$ on a

$$\kappa^{-1} |s - t| - \ell \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \kappa |s - t| + \ell.$$

Si $I = [a, b]$ est un interval fermé borné, les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont les *extrémités* de γ . Une géodésique est une $(1, 0)$ -quasi-isométrie.

Théorème 4.7 (Stabilité des quasi-géodésiques). *Soient $\delta \geq 0$, $\kappa \geq 1$ et $\ell \geq 0$. Il existe $D \geq 0$ avec la propriété suivante. Soit X un espace géodésique δ -hyperbolique. Si γ et ν sont deux (κ, ℓ) -quasi-géodésiques ayant les mêmes extrémités, alors γ est dans le D -voisinage de ν et vice versa.*

Remarques.

- La *distance de Hausdorff* entre deux parties Y_1 et Y_2 est définie comme

$$d_H(Y_1, Y_2) = \inf \{ C \in \mathbb{R}_+ \mid Y_1 \subset Y_2^{+C} \text{ et } Y_2 \subset Y_1^{+C} \}.$$

C'est une distance sur les parties fermées non-vides de X (cette distance peut toutefois prendre des valeurs infinies). L'énoncé nous dit donc que $d_H(\gamma, \nu) \leq D$.

- Le résultat s'applique en particulier si ν est une géodésique. Autrement dit, dans un espace hyperbolique, une quasi-géodésique ne s'éloigne jamais trop de la géodésique entre ses extrémités. C'est une propriété caractéristique des espaces à courbure négative (et totalement fausse dans \mathbb{R}^2 par exemple).
- On remarquera que le paramètre D ne dépend que de δ , κ et ℓ . Il ne dépend ni de γ et ν (heureusement sinon l'énoncé serait vide) et (surtout) ni de X .

On admet pour le moment le [Théorème 4.7](#) afin de démontrer le [Théorème 4.5](#).

Démonstration du Théorème 4.5. On se donne un plongement (κ, ℓ) -quasi-isométrique $f: X \rightarrow Y$ entre deux espace métriques X et Y . On suppose que Y est δ -hyperbolique. On va montrer que les triangles géodésiques de X sont uniformément étroits. Pour cela on considère trois points $x, y, z \in X$ et fixe des géodésiques $[x, y]$, $[y, z]$ et $[z, x]$. On remarque que $f([x, y])$ est une (κ, ℓ) -quasi-géodésique. Aussi la distance de Hausdorff entre $f([x, y])$ et $[f(x), f(y)]$ est au plus D où $D = D(\delta, \kappa, \ell)$ est le paramètre fourni par le Théorème 4.7. De même avec les géodésiques $[y, z]$ et $[z, x]$. Puisque Y est δ -hyperboliques, ses triangles géodésiques sont 4δ -étroits (Proposition 4.3). Donc $[f(x), f(z)]$ est contenu dans le 4δ -voisinage de $[f(x), f(y)] \cup [f(y), f(z)]$. Par conséquent $f([x, z])$ est contenu dans le $(4\delta + 2D)$ -voisinage de $f([x, y]) \cup f([y, z])$ (faire un dessin). Autrement dit si p est un point de $[x, z]$, il existe q sur $[x, y] \cup [y, z]$ tel que $d(f(p), f(q)) \leq 4\delta + 2D$. Puisque f est un plongement (κ, ℓ) -quasi-isométrique, l'inégalité précédent nous donne

$$d(p, q) \leq \kappa d(f(p), f(q)) + \kappa \ell \leq \kappa(4\delta + 2D + \ell).$$

Ainsi les triangles géodésiques de X sont δ' -fins avec $\delta' = \kappa(4\delta + 2D + \ell)$. Donc X est hyperbolique (Proposition 4.3). \square

4.3 Ultra-limite d'espace métrique

On peut penser à un espace δ -hyperbolique comme une « δ -déformation » d'un arbre. En effet si on regarde des triangles géodésiques de très très loins, il ressemble de plus en plus aux triangles d'un arbre. Pour formaliser et exploiter cette idée, on va définir une notion de limite d'espaces métriques.

Un *ultra-filtre non principal* est une application $\omega: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$ qui est finiment additive, c'est à dire que

$$\omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B) - \omega(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

qui s'annule sur toute partie finie et telle que $\omega(\mathbb{N}) = 1$. L'existence d'une telle application découle du Lemme de Zorn, voir par exemple Bourbaki [1] (on admettra donc l'axiome du choix!). Il faut penser à un ultra-filtre comme une machine à « faire des choix cohérents ». En particulier elle va nous permettre d'extraire des sous-suites convergentes sans avoir à se poser de questions.

Un propriété P_n est vraie ω -presque partout (ω -pp) si

$$\omega(\{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ est vraie}\}) = 1.$$

Observons que si A est une partie de \mathbb{N} alors $\omega(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \omega(A)$. Par conséquent si une propriété n'est pas vraie ω -pp, alors elle est fausse ω -pp. Par exemple si (u_n) est une suite réelle alors $u_n \geq 0$ ω -pp ou $u_n < 0$ ω -pp. Cet exemple illustre la puissance de ω pour faire des choix. Les choix d'un ultra-filtre sont cohérent : si P_n et P'_n sont deux propriétés vraies ω -pp, alors leur conjonction $P_n \wedge P'_n$ est vraie ω -pp. Cela résulte du fait que si $\omega(A) = 1$ et $\omega(B) = 1$ alors $\omega(A \cap B) = 1$.

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}_+$. On dit que (u_n) converge vers ℓ selon ω et on écrit $\lim_{\omega} u_n = \ell$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ω -pp. Si (u_n) converge (au sens usuel) alors elle converge selon ω . Les opérations standards sur les limites (somme, produit, etc) fonctionnent comme dans le cas usuel. Notre intérêt pour les ultra-filtre réside dans l'énoncé suivant.

Proposition 4.8. *Soit ω un ultra-filtre non-principal. Toute suite réelle bornée admet une limite selon ω .*

Démonstration. La preuve est une adaptation directe de la preuve du théorème de Bolzano–Weierstraß. \square

À partir de maintenant on ne verra plus les ultra-filtres que comme un outil pour faire converger des suites bornées. C'est à peu près la seule propriété qui nous intéressera.

On se donne maintenant une suite d'espaces métriques pointés (X_n, x_n^0) et un ultra-filtre non-principal ω . Le produit restreint de cette suite est

$$\prod_{\omega} X_n = \left\{ (y_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid d(y_n, x_n^0) \text{ est uniformément borné} \right\}.$$

Si (y_n) et (z_n) sont deux suites de ce produit restreint, l'inégalité triangulaire nous dit que la suite $d(y_n, z_n)$ est bornée. Par conséquent la limite $\lim_{\omega} d(y_n, z_n)$ est bien définie. On définit alors une relation binaire entre les éléments du produit restreint : $(y_n) \sim (z_n)$ si $\lim_{\omega} d(y_n, z_n) = 0$. On vérifie que cette relation est une relation d'équivalence (exercice).

Définition 4.9. La limite de la suite (X_n, x_n^0) selon ω est le quotient

$$\lim_{\omega} (X_n, x_n^0) = \prod_{\omega} X_n / \sim.$$

On le notera simplement $\lim_{\omega} X_n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Notation. Si (y_n) est une suite du produit restreint, on notera $\lim_{\omega} y_n$ sa classe dans $\lim_{\omega} X_n$.

Métrique. Pour le moment $\lim_{\omega} X_n$ est juste un ensemble de point. On muni maintenant cet ensemble d'une distance. Si $y = \lim_{\omega} y_n$ et $z = \lim_{\omega} z_n$ on pose

$$d(y, z) = \lim_{\omega} d(y_n, z_n)$$

Exercice 4.10.

- (i) Vérifier que cette limite est bien définie et ne dépend pas du choix des suites (y_n) et (z_n) .
- (ii) Vérifier que l'application $d: \lim_{\omega} X_n \times \lim_{\omega} X_n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi obtenue est bien une distance.

Exemples.

- (i) Si X_n est la suite constante égale à \mathbb{R}^2 pointé en l'origine alors $\lim_{\omega} X_n$ est isométrique à \mathbb{R}^2 .
- (ii) Si X_n est la suite constante égale à \mathbb{Q} pointé en 0, alors $\lim_{\omega} X_n = \mathbb{R}$.
- (iii) Soit (ε_n) une suite réelle qui converge vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note X_n le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 renormalisé par ε_n , c'est à dire que les arrêtes du graphe vue dans X_n sont de longueur ε_n . On pointe ces espace métriques en l'identité. Alors $\lim_{\omega} X_n$ est isométrique à \mathbb{R}^2 muni de la distance L^1

Proposition 4.11. Soient (X_n, x_n^0) une suite pointé d'espaces métrique et ω un ultra-filtre non principal. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace X_n est géodésique alors $\lim_{\omega} X_n$ aussi.

Démonstration. Soient $y = \lim_{\omega} y_n$ et $z = \lim_{\omega} z_n$ deux points de $\lim_{\omega} X_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on fixe $\gamma_n: [0, a_n] \rightarrow X_n$ une géodésique de y_n vers z_n . En particulier $a_n = d(y_n, z_n)$ est une suite bornée. On peut donc définir

$$a = \lim_{\omega} a_n = \lim_{\omega} d(y_n, z_n) = d(y, z).$$

Soit $s \in [0, a]$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(x_n^0, \gamma_n(sa_n/a)) \leq d(x_n^0, y_n) + d(y_n, \gamma_n(sa_n/a)) \leq d(x_n^0, y_n) + d(y_n, z_n)$$

Autrement dit la suite $d(x_n^0, \gamma_n(sa_n/a))$ est bornée. On peut donc définir un chemin $\gamma: [0, a] \rightarrow \lim_{\omega} X_n$ de la manière suivante : pour tout $s \in [0, a]$,

$$\gamma(s) = \lim_{\omega} \gamma_n\left(\frac{s}{a}a_n\right)$$

On vérifie alors que pour tout $s, t \in [0, a]$,

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \lim_{\omega} d\left(\gamma_n\left(\frac{s}{a}a_n\right), \gamma_n\left(\frac{t}{a}a_n\right)\right) = \lim_{\omega} \frac{a_n}{a} |s - t| = |s - t|$$

Par conséquent γ est une géodésique entre y et z ce qui termine la preuve. \square

Proposition 4.12. Soient (X_n, x_n^0) une suite pointée d'espaces métrique et ω un ultra-filtre non principal. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace X_n est géodésique et δ_n -hyperbolique où δ_n est une suite qui converge vers 0. Alors $\lim_{\omega} X_n$ est un arbre réel.

Démonstration. On sait déjà d'après la [Définition 4.9](#) que $\lim_{\omega} X_n$ est géodésique. Il suffit donc de montrer que $\lim_{\omega} X_n$ est 0-hyperbolique (cf. [Exercice 4.4](#)). Pour cela on se donne quatre points $x = \lim_{\omega} x_n$, $y = \lim_{\omega} y_n$, $z = \lim_{\omega} z_n$ et $t = \lim_{\omega} t_n$ dans $\lim_{\omega} X_n$. Puisque X_n est δ_n -hyperbolique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle x_n, z_n \rangle_{t_n} \geq \min \{ \langle x_n, y_n \rangle_{t_n}, \langle y_n, z_n \rangle_{t_n} \} - \delta_n.$$

En passant à la limite, il vient

$$\langle x, z \rangle_t \geq \min \{ \langle x, y \rangle_t, \langle y, z \rangle_t \}.$$

Donc $\lim_{\omega} X_n$ est 0-hyperbolique. \square

Exercice 4.13. Soient (X_n, x_n^0) une suite pointée d'espaces métrique et ω un ultra-filtre non principal. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fixe une partie Y_n de X_n de sorte que $d(x_n^0, Y_n)$ est uniformément bornée. On note alors

$$\lim_{\omega} Y_n = \left\{ y = \lim_{\omega} y_n \mid y_n \in Y_n, \omega\text{-pp} \right\}.$$

- (i) Montrer que $\lim_{\omega} Y_n$ est non vide.
- (ii) Si $z = \lim_{\omega} z_n$ est un point de $\lim_{\omega} X_n$, montrer que

$$d(z, \lim_{\omega} Y_n) = \lim_{\omega} d(z_n, Y_n).$$

4.4 Stabilité des quasi-géodésiques

Le but de cette section est de démontrer le [Théorème 4.7](#). Il existe différentes preuves dans la littérature. On va utiliser ici un point de vue asymptotique, qui consiste à regarder un espace hyperbolique « de très loin », un genre de zoom arrière infini, pour se ramener au cas plus facile des arbres.

Le cas limite. Soit X un arbre réel ([Exercice 4.4](#)). Soit $\kappa \geq 1$. Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ une $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésique. En particulier, γ est un arc. Par définition d'un arbre, γ se confond avec la géodésique entre le même extrémités. Ce qui se reformule de la manière suivante.

Proposition 4.14. *Soit X un arbre réel. Soit $\kappa \geq 1$. La distance de Hausdorff entre deux $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésiques de X ayant les mêmes extrémités est nulle.*

Le cas général. On s'attelle maintenant à la preuve du cas générale. La démonstration se fait par l'absurde. Affirmer que le théorème est faux fournit une famille de contre-exemples (un espace et deux quasi-géodésiques). En utilisant une limite d'espace métrique on va faire dégénérer cette suite de contre-exemples vers un cas limite : deux chemins bi-Lipschitz dans un arbre réel. L'analyse de ce cas limite va nous fournir une contradiction.

Démonstration du [Théorème 4.7](#). On fixe $\delta \geq 0$, $\kappa \geq 1$ et $\ell \geq 0$. Supposons que le théorème soit faux. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe

- un espace géodésique δ -hyperbolique X_n
- deux (κ, ℓ) -quasi-géodésiques $\gamma_n: [a_n, b_n] \rightarrow X_n$ et $\nu_n: [b_n, c_n] \rightarrow X_n$ de X_n ayant les mêmes extrémités et satisfaisant $d_H(\gamma_n, \nu_n) \geq n$.

Etape 1 (Renormalisation). Quitte à inverser les rôles de γ_n et ν_n on peut supposer que γ_n n'est pas dans le n -voisinage de ν_n . On reparamètre γ_n de sorte que $0 \in [a_n, b_n]$ et

$$d(\gamma_n(0), \nu_n) \geq \sup_{s \in [a_n, b_n]} d(\gamma_n(s), \nu_n) - 1.$$

Autrement dit $\gamma_n(0)$ est grosso modo le point de γ_n le plus éloigné de ν_n . A nouveau quitte à reparamétrer ν_n on peut supposer que $0 \in [c_n, d_n]$ et

$$d(\gamma_n(0), \nu_n) \leq d(\gamma_n(0), \nu_n(0)) \leq d(\gamma_n(0), \nu_n) + 1.$$

Il découle de nos hypothèses que $D_n = d(\gamma_n(0), \nu_n(0))$ est minoré par $n-1$. En particulier D_n diverge vers l'infini. A partir de maintenant on va travailler dans l'espace renormalisé $X'_n = D_n^{-1}X_n$. C'est à dire que si x, x' sont deux points de X_n alors

$$d_{X'_n}(x, x') = \frac{1}{D_n} d_{X_n}(x, x').$$

Pour s'accorder avec cette renormalisation, il nous faut aussi modifier les chemines γ_n et ν_n . On pose donc

$$\begin{array}{lcl} \gamma'_n: \left[\frac{a_n}{D_n}, \frac{b_n}{D_n} \right] & \rightarrow & X'_n \\ s & \rightarrow & \gamma_n(sD_n) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} \nu'_n: \left[\frac{c_n}{D_n}, \frac{d_n}{D_n} \right] & \rightarrow & X'_n \\ s & \rightarrow & \nu_n(sD_n) \end{array}$$

On vérifie que γ'_n et ν'_n sont des (κ, ℓ_n) quasi-géodésiques de X'_n avec $\ell_n = D_n^{-1}\ell$. En effet pour tout $s, t \in [D_n^{-1}a_n, D_n^{-1}b_n]$ on a

$$d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) = \frac{1}{D_n} d_{X_n}(\gamma_n(sD_n), \gamma_n(tD_n)).$$

Puisque γ_n est une (κ, ℓ) -quasi-géodésique de X_n , on en déduit

$$\frac{1}{D_n} \left(\kappa^{-1} |sD_n - tD_n| - \ell \right) \leq d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) \leq \frac{1}{D_n} \left(\kappa |sD_n - tD_n| + \ell \right)$$

Ce qui se réécrit

$$\kappa^{-1} |s - t| - \frac{\ell}{D_n} \leq d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) \leq \kappa |s - t| + \frac{\ell}{D_n}$$

D'où le résultat. La preuve pour ν'_n est identique.

Etape 2 (Passage à la limite). On fixe maintenant un ultra-filtre non-principal ω . On choisit comme point base $x_n^0 = \gamma'_n(0) = \gamma_n(0)$. Pour simplifier on appelle X' l'espace limite

$$X' = \lim_{\omega} (X'_n, x_n^0).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace X'_n est géodésique et δ_n -hyperbolique, avec $\delta_n = D_n^{-1}\delta$. En particulier δ_n converge vers 0. Donc X' est un arbre réel ([Proposition 4.12](#)). Il nous faut maintenant définir la limite des chemins γ'_n et ν'_n . L'idée est semblable à la preuve de la [Proposition 4.11](#). Il faut cependant faire attention que les bornes $D_n^{-1}a_n$ et $D_n^{-1}b_n$ du domaine de définition de γ'_n peuvent diverger. Aussi on définit a comme $a = \lim_{\omega} D_n^{-1}a_n$ si la limite existe et est finie et $a = -\infty$ sinon. De même on pose $b = \lim_{\omega} D_n^{-1}b_n$ si la limite existe et est finie et $b = +\infty$ sinon. On peut alors considérer le chemin

$$\begin{aligned} \gamma' : (a, b) &\rightarrow X' \\ s &\rightarrow \lim_{\omega} \gamma'_n(s) \end{aligned}$$

Les bornes de l'intervalle (a, b) sont ouvertes ou fermées selon que a et b sont infinis ou finis. Le chemin γ' ainsi obtenu est une $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésique. En effet, fixons $s, t \in [a, b]$, on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\kappa^{-1} |s - t| - \frac{\ell}{D_n} \leq d_{X'_n}(\gamma'_n(s), \gamma'_n(t)) \leq \kappa |s - t| + \frac{\ell}{D_n}.$$

Puisque D_n diverge vers l'infini, en passage à la limite, il reste

$$\kappa^{-1} |s - t| \leq d_{X'}(\gamma'(s), \gamma'(t)) \leq \kappa |s - t|.$$

En particulier, γ' est (modulo reparamétrisation) une géodésique de X' . En procédant de la même manière on définit une $(\kappa, 0)$ -quasi-géodésique $\nu' : (c, d) \rightarrow X'$. Par ailleurs il découle de notre choix de renormalisation que pour tout

$$d_{X'}(\gamma'(0), \nu') = 1 \quad \text{tandis que} \quad d_{X'}(\gamma'(s), \nu') \leq 1, \quad \forall s \in (a, b)$$

(On se reportera à l'[Exercice 4.13](#) pour les détails de la preuve.)

Etape 3 (Cas limite). Le chemin γ' est donc à dans le 1-voisinage de ν' et n'est pas confondu avec ν' . Si a est fini, alors c aussi et les chemins γ' et ν' ont la même origine. De même si b est fini alors d aussi et les chemins γ' et ν' ont le même point terminal. On distingue alors trois cas (faire des dessins). On observe que dans ces trois cas, γ' ne peut pas être dans le 1-voisinage de ν' sans être confondu avec ν' . D'où la contradiction. \square

4.5 Groupes hyperboliques

Définition 4.15. Un groupe G est *hyperbolique* (au sens de Gromov) s'il admet une action proprement discontinue et co-compacte sur un espace géodésique propre et hyperbolique.

Puisque « être hyperbolique » est une propriété invariante par quasi-isométries, il découle du lemme de Milnor-Švarc ([Proposition 1.8](#)), qu'un groupe G est hyperbolique si et seulement si il existe une partie génératrice finie S de G tel que $\text{Cay}(G, S)$ est hyperbolique.

Exemples.

- (i) Tous les groupes finis sont hyperboliques (l'action triviale sur un point est proprement discontinue et co-compact).
- (ii) \mathbb{Z} est hyperbolique. Plus généralement les groupes libres de type fini sont hyperboliques. Par contre \mathbb{Z}^2 (et plus généralement \mathbb{Z}^n pour $n \geq 2$) n'est pas hyperbolique.
- (iii) Si Σ est une surface compacte de genre $g \geq 2$, alors son groupe fondamental $\pi_1(\Sigma)$ est hyperbolique. En effet $\pi_1(\Sigma)$ agit de façon proprement discontinue et co-compact sur le revêtement universel de Σ qu'on peut identifier au plan hyperbolique \mathbb{H}_2 . Plus généralement, si M est une variété Riemannienne compacte dont la courbure sectionnelle est négativement majorée, alors son groupe fondamental est hyperbolique.
- (iv) Soient A et B deux groupes finis. Alors $A * B$ est hyperbolique (exercice).

On verra plus tard que un groupe tiré « au hasard » (dans un sens à préciser) est toujours hyperbolique!

Exercice 4.16. Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini de G . Montrer que G est hyperbolique si et seulement si H est hyperbolique.

5 Isométries d'un espace hyperbolique

On a vu dans la section 3.3 que les isométries d'un arbre sont de deux types : elliptique ou loxodromique. Ces isométries ont un comportement très particulier. Une isométrie elliptique fixe (au moins) un point dans l'arbre. Une isométrie loxodromique a un axe invariant le long duquel elle agit par translation. On va voir maintenant que les isométries d'un espace hyperbolique ont des propriétés très similaires.

A partir de maintenant on fixe un espace géodésique X supposé δ -hyperbolique.

5.1 Longueurs de translation

Étant donné une isométrie g de X on définit sa *longueur de translation* par

$$\|g\| = \inf_{x \in X} d(gx, x).$$

Sa *longueur de translation stable* est

$$\|g\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(g^n x, x)}{n}.$$

L'existence de cette limite découle de propriété des suites sous-additive (cf. Lemme de Fekete). Par ailleurs le résultat ne dépend pas du choix du point $x \in X$ (exercice). On remarque pour tout $x \in X$,

$$\|g\|_\infty \leq \|g\| \leq d(gx, x).$$

Par ailleurs $\|g^n\|_\infty = |n| \cdot \|g\|_\infty$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Dans un espace hyperbolique ces deux longueurs de translation sont à peu près les mêmes

Lemme 5.1. *Soit g une isométrie de X . Ses longueurs de translation satisfont*

$$\|g\|_\infty \leq \|g\| \leq \|g\|_\infty + 8\delta.$$

Démonstration. La première inégalité découle des observations ci-dessus. On se concentre sur la seconde inégalité. Soit $x \in X$. On note m le milieu d'une géodésique $[x, gx]$, de sorte que gm est le milieu de $[gx, g^2x]$. On a lors de l'étude des triangles étroit – voir l'inégalité (5) – que

$$d(gm, m) \leq \max \left\{ |d(gx, m) - d(gx, gm)|, d(gx, m) + d(gx, gm) - 2 \langle x, g^2x \rangle_{gx} \right\} + 4\delta.$$

Puisque m est le milieu de $[x, gx]$, l'inégalité précédente devient

$$d(gm, m) \leq \max \{0, d(g^2x, gx) - d(gx, x)\} + 4\delta.$$

Ainsi soit $d(gm, m) \leq 4\delta$ soit $d(gm, m) + d(gx, x) \leq d(g^2x, x) + 4\delta$. Dans tous les cas on a $2\|g\| \leq d(g^2x, x) + 8\delta$. Cette dernière inégalité étant valable pour tout point $x \in X$, il vient

$$\|g\| \leq \frac{1}{2} \|g^2\| + 4\delta.$$

Une démonstration par récurrence montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in X$, on a

$$\|g\| \leq \frac{1}{2^n} \|g^{2^n}\| + 8 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \delta \leq \frac{1}{2^n} d(g^{2^n} x, x) + 8 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \delta$$

En passant à la limite, il vient $\|g\| \leq \|g\|_\infty + 8\delta$. □

Bien que ces deux longueurs de translation soient différentes elles rendent des services quelque peu différents. Attardons nous sur un exemple pour comprendre l'intérêt de la longueur de translation stable. Supposons que X est un triangle équilatéral dans \mathbb{R}^2 et g la rotation d'angle $2\pi/3$ qui laisse le triangle invariant. On regarde X comme un espace métrique (muni de la métrique induite). En particulier, seuls les points des côtés du triangle sont dans X . Notons que X est hyperbolique (c'est un espace borné) et g une isométrie d'ordre finie de X . Par analogie avec les arbres, on aimerait que la longueur de translation de g soit nulle. Ce n'est malheureusement pas le cas, puisque le point fixe de la rotation n'est pas un point de X . Cependant sa longueur de translation stable, elle est nulle.

Définition 5.2 (Classification des isométries). Soit g une isométrie de X . On dit que g est

- (i) *elliptique* si une de ses orbites est bornées.
- (ii) *parabolique* si $\|g\|_\infty = 0$ est g admet une orbite bornée
- (iii) *loxodromique* si $\|g\|_\infty > 0$.

Remarques. Le choix de l'orbite dans la définition n'a pas d'importance. En effet une orbite de g est bornée si et seulement si toutes ses orbites sont bornées (c'est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire). Notons aussi que si g a une orbite bornée alors $\|g\|_\infty = 0$ (exercice). Ainsi la longueur de translation stable d'une isométrie elliptique est toujours nulle. Par contraposée, les orbites d'une isométrie loxodromique ne sont jamais bornée. Comme le suggère la classification ci-dessous, on peut rencontrer des isométries g dont la longueur de translation stable est nulle, mais admettant une orbite non-bornée (en particulier g est d'ordre infini). Ces isométries paraboliques, sont un peu spéciale et n'existaient pas dans le cas d'un arbre. Un exemple d'isométrie parabolique dans le plan hyperbolique \mathbb{H}_2 (vu comme le demi-plan supérieur de Poincaré) est la transformation g qui envoie (x, y) sur $(x + 1, y)$. Faire un dessin !

Exercice 5.3. Soit g une isométrie de X . Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que g est elliptique (respectivement parabolique, loxodromique) si et seulement si g^n l'est aussi.

Exercice 5.4. Soit G un groupe agissant par isométries sur deux espace métriques hyperboliques X_1 et X_2 . Soit $f: X_1 \rightarrow X_2$ un plongement quasi-isométrique G -équivariant (i.e. $f(gx) = gf(x)$ pour tout $x \in X_1$ et $g \in G$). Montrer que f est un isométrie elliptique (respectivement parabolique, loxodromique) de X_1 si et seulement si f est une isométrie elliptiques (respectivement parabolique, loxodromique) de X_2 .

5.2 Interlude : quasi-convexité

Dans le cas où l'espace X est un arbre réel on avait associé à une isométrie g un ensemble caractéristique C_g . On a vu que connaître l'ensemble caractéristique de g permet de « décrire » l'action de g sur X entier (cf. Exercice 3.14). C'est ensemble caractéristique à la propriété d'être un sous-arbre de X . Autrement dit C_g est convexe : si x et y sont deux point de C_g la géodésique $[x, y]$ est entièrement contenu dans C_g . Sur le même modèle, on aimerait associer aux isométries de l'espace hyperbolique un ensemble caractéristique. Cet ensemble ne sera pas tout à fait convexe. La notion de *quasi-convexité* permet de pallier ce défaut. On rappelle que X est un espace géodésique δ -hyperbolique.

Définition 5.5. Soit $\alpha \geq 0$. Une partie Y de X est α -quasi-convexe si pour tout $y, y' \in Y$, toute géodésique $[y, y']$ est contenue dans le α -voisinage de X .

Todo : faire un dessin !

Vocabulaire. On dira que Y est *quasi-convexe* s'il existe $\alpha \geq 0$ tel que Y est α -quasi-convexe. On appellera α *une constante de quasi-convexité* ou avec un abus de langage *la* constante de quasi-convexité.

Exemples. Les ensembles suivant sont quasi-convexes (exercice : donner une estimation de la constante de quasi-convexité α).

- (i) Une partie borné de X .
- (ii) Une géodésique de X .
- (iii) Une boule de X .
- (iv) Si $f: Y \rightarrow X$ est un plongement quasi-isométrique d'un espace géodésique Y dans X , alors $f(Y)$ est une partie quasi-convexe de X (utiliser la stabilité des quasi-géodésiques).
- (v) Si H est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe hyperbolique G alors H est une partie quasi-convexe de G .

Exercice 5.6. Soit Y une partie de X . On appelle enveloppe convexe de Y et on note $\text{Env}(Y)$ la réunion des géodésiques reliant deux points de Y . Montrer que Y est quasi-convexe. Donner une estimation de la constante de quasi-convexité.

On va maintenant essayer comprendre comment un point $x \in X$ se projette sur une partie quasi-convexe Y . Toutefois on n'a pas supposé que X était localement compacte. Par ailleurs la partie Y n'est peut-être pas fermée. Par conséquent, il se peut que « la » projection de x sur Y n'existe peut-être pas. Toutefois, lorsqu'on travaille avec des espaces hyperboliques, on n'est pas à une « petite erreur » près. On se contentera donc de projections approximatives comme définies ci-dessous.

Définition 5.7. Soit Y une partie de X . Soit $\eta > 0$. Soit $x \in X$. Un η -projection de x sur Y est un point $y \in Y$ tel que $d(x, y) \leq d(x, Y) + \eta$. Une *projection* de x sur Y est une 0-projection de x sur Y .

On peut maintenant énoncer le résultat clef sur les parties quasi-convexes.

Proposition 5.8. Soit Y une partie α -quasi-convexe de X . Soient $x, x' \in X$. Soient p (respectivement p') une η -projection de x (respectivement x') sur Y . Alors

- (i) Pour tout $y \in Y$ on a $\langle x, y \rangle_p \leq \alpha + \eta + 4\delta$.
- (ii) La distance entre x et x' vérifie

$$d(p, p') \leq \max \{d(x, x') - d(x, p) - d(x', p') + 2\varepsilon, \varepsilon\}$$

où $\varepsilon = 2\alpha + 2\eta + 5\delta$.

Remarques.

- Le second point de la proposition s'interprète géométriquement de la manière suivante. Soient les projections p et p' sont proches (à distance au plus ε) et l'histoire s'arrête là. Si au contraire $d(p, p') > \varepsilon$ alors on a nécessairement

$$d(x, x') \geq d(x, p) + d(p, p') + d(p', x') - 2\varepsilon.$$

Notons que l'inégalité triangulaire nous donne une inégalité dans l'autre sens :

$$d(x, x') \leq d(x, p) + d(p, p') + d(p', x').$$

Ainsi le chemin obtenu en concaténant les géodésiques $[x, p]$, $[p, p']$ et $[p', x']$ est « presque » une géodésique. Pour être précis c'est une $(1, 2\varepsilon)$ -quasi-géodésique. Il en résulte que si p et p' sont suffisamment éloignés alors toute géodésique entre x et x' passe proche de Y .

- En appliquant la proposition avec $x = x'$, on voit que deux η -projections p et p' de x sur Y vérifient toujours $d(p, p') \leq \varepsilon$. Une η -projection n'est évidemment pas unique. Toutefois deux η -projections d'un même point sur une partie quasi-convexe sont toujours proches. Vu de loin, c'est comme si la projection était unique.

Démonstration. Commençons par le premier point. On se donne un point z sur une géodésique $[x, p]$ tel que $d(p, z) = \langle x, y \rangle_p$. L'inégalité (5) (cf. preuve des triangles étroits) que z est à distance au plus 4δ d'un point de la géodésique $[p, y]$. Or cette géodésique est contenu dans le α -voisinage de Y . Par conséquent

$$d(x, Y) \leq d(x, z) + \alpha + 4\delta \leq d(x, p) - \langle x, y \rangle_p + \alpha + 4\delta.$$

Rappelons que p est un η -projection de x sur Y . Il vient donc

$$d(x, Y) \leq d(x, p) - \langle x, y \rangle_p + \alpha + \eta + 4\delta,$$

d'où le résultat annoncé.

Passons au second point. L'inégalité à quatre points (4) donne

$$d(x, p') + d(x', p) \leq \max \{d(x, x') + d(p, p'), d(x, p) + d(x', p')\} + 2\delta.$$

En appliquant le premier point avec $y = p'$ on observe que $\langle x, p' \rangle_p \leq \alpha + \eta + 4\delta$. Par conséquence

$$d(x, p') = d(x, p) + d(p, p') - 2 \langle x, p' \rangle_p \geq d(x, p) + d(p, p') - 2\alpha - 2\eta - 8\delta.$$

De façon symétrique, on a

$$d(x', p) \geq d(x', p') + d(p', p) - 2\alpha - 2\eta - 8\delta.$$

En combinant les trois inégalités précédentes on obtient

$$d(x, p) + d(x', p') + 2d(p, p') \leq \max \{d(x, x') + d(p, p'), d(x, p) + d(x', p')\} + 2\varepsilon, \quad (8)$$

où $\varepsilon = 2\alpha + 2\eta + 5\delta$. Si le maximum dans (8) est atteint par $d(x, x') + d(p, p')$ on obtient

$$d(p, p') \leq d(x, x') - d(x, p) - d(x', p') + 2\varepsilon.$$

Si le maximum dans (8) est atteint par $d(x, p) + d(x', p')$ il vient alors $d(p, p') \leq \varepsilon$. Les deux cas réunis, correspondent au résultat annoncé. \square

Exercice 5.9. Soit Y une partie α -quasi-convexe de X . Montrer que pour tout $A \geq \alpha$, le A -voisinage de Y est 8δ -quasi-convexe.

Exercice 5.10. Soient Y_1 et Y_2 deux parties respectivement α -quasi-convexes de X . Montrer que si l'ensemble

$$Z = Y_1^{+\alpha+8\delta} \cap Y_2^{+\alpha+8\delta}$$

est non vide alors il est encore quasi-convexe. On rappelle que Y^{+A} représente le A -voisinage de Y .

5.3 Ensemble caractéristique

À partir de maintenant on supposera que X est δ -hyperbolique avec $\delta > 0$. Cette hypothèse n'est pas très couteuse. En effet on a déjà traité le cas des arbres réels. En outre si X est 0-hyperbolique alors il est δ -hyperbolique pour tout $\delta > 0$.

Définition 5.11. Soit g une isométrie de X . On appelle *ensemble caractéristique* de g et on note C_g l'ensemble des points $x \in X$ tels que $d(gx, x) \leq \|g\| + 10\delta$.

Remarques.

- ▶ Dans le cas des arbres réels, on a montré que la longueur de translation $\|g\|$ était réalisée. Ce ne sera pas le cas ici. Pour cette raison on regarde l'ensemble des points qui réalisent la plus petite translation à δ -près. Choisir $\delta > 0$ évite d'introduire d'autres paramètres auxiliaires.
- ▶ L'ensemble caractéristique est invariant sous l'action de g .

La proposition suivante doit être mise en garde de la [Proposition 3.12](#).

Proposition 5.12. Soit g une isométrie de X . L'ensemble caractéristique de g vérifie les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout $x \in X$, on a $d(gx, x) \geq 2d(x, C_g) + \|g\| - 18\delta$.
- (ii) Si $x \in X$ est un point tel que $d(gx, x) \leq \|g\| + A$ alors x est à distance au plus $A/2 + 9\delta$ de C_g .
- (iii) L'ensemble caractéristique C_g est 16δ -quasi-convexe.

Remarque. Il découle de l'inégalité triangulaire que pour tout $x \in X$ on a $d(gx, x) \leq 2d(x, C_g) + \|g\| + 10\delta$. Aussi le point (i) est une égalité à δ près.

Démonstration. Soit $x \in X$. Remarquons que si x est dans C_g alors le point (i) est direct. On peut donc supposer que $d(x, C_g) > 0$. On fixe $\eta > 0$ et y une η -projection de x sur C_g . On fixe une géodésique $[y, gy]$ entre y et gy . Notons que si z est un point de cette géodésique alors l'inégalité triangulaire donne

$$d(gz, z) \leq d(gz, gy) + d(gy, z) = d(z, y) + d(gy, z) = d(y, gy) \leq \|g\| + 10\delta.$$

Ainsi toute la géodésique $[y, gy]$ est contenue dans C_g . Puisque y est une η -projection de x sur C_g c'est aussi une η -projection de x sur $[y, gy]$. Comme C_g est invariant sous l'action de g , le

point gy est une η -projection de gx sur C_g et donc sur $[y, gy]$. En tant que géodésique $[y, gy]$ est 2δ -quasi-convexe. Aussi la proposition [Proposition 5.8](#) appliquée avec $[y, gy]$ donne

$$d(y, gy) \leq \max \{d(x, gx) - 2d(x, y) + 18\delta + 4\eta, 9\delta + 2\eta\} \quad (9)$$

Rappelons que x n'est pas dans C_g . Par définition de y , tout point z de $[x, y]$ vérifiant $d(x, z) < d(x, y) - \eta$ n'est pas dans C_g et vérifie donc $d(gz, z) > \|g\| + 10\delta$. Il en découle que $d(gy, y) \geq \|g\| + 10\delta - 2\eta$. Autrement dit si η est suffisamment petit, le maximum dans (9) ne peut pas être atteint par $9\delta + 2\eta$. Ainsi on obtient

$$d(gx, x) \geq 2d(x, y) + d(gy, y) - 18\delta - 4\eta \geq 2d(x, C_g) + \|g\| - 18\delta - 4\eta.$$

Cette dernière inégalité est valable dès que η est suffisamment petit. Aussi $d(gx, x) \geq 2d(x, C_g) + \|g\| - 18\delta$, ce qui correspond au point (i). Le point (ii) est une conséquence de (i). On se concentre maintenant sur le point (iii). Soient y et y' deux points de C_g et $[y, y']$ une géodésique entre ces points. Soit x un point sur $[y, y']$, de sorte que $\langle y, y' \rangle_x = 0$. On affirme que $d(gx, x) \leq \|g\| + 14\delta$. En appliquant deux fois l'inégalité à quatre points (3) il vient

$$\min \{ \langle y, gy \rangle_x, \langle gy, gy' \rangle_x, \langle gy', y' \rangle_x \} \leq \langle y, y' \rangle_x + 2\delta \leq 2\delta. \quad (10)$$

Supposons que le minimum soit atteint par $\langle y, gy \rangle_x$. L'inégalité triangulaire entraîne alors

$$d(gx, x) \leq d(gy, y) + 2 \langle y, gy \rangle_x \leq \|g\| + 12\delta.$$

Si le minimum dans (10) est atteint par $\langle gy', y' \rangle_x$, on montre de même que $d(gx, x) \leq \|g\| + 12\delta$. Supposons maintenant que le minimum dans (10) est par $\langle gy, gy' \rangle_x$. Ainsi $\langle gy, gy' \rangle_x \leq 2\delta$. En appliquant l'inégalité à quatre points (4) on a

$$d(gx, x) + d(gy, gy') \leq \max \{d(gx, gy) + d(x, gy'), d(gx, gy') + d(x, gy)\} + 2\delta. \quad (11)$$

Or l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} d(gx, gy) + d(x, gy') &\leq d(gy, y) + d(gy, gy') + 2 \langle gy, gy' \rangle_x \\ &\leq d(gy, y) + d(gy, gy') + 4\delta \\ &\leq \|g\| + d(gy, gy') + 14\delta \end{aligned}$$

La même inégalité reste vraie en inversant les rôles de y et y' . Ainsi (11) devient $d(gx, x) \leq \|g\| + 14\delta$, ce qui est l'inégalité annoncée. Il découle alors du point (ii) que x est distance au plus 16δ de C_g . Autrement dit $[y, y']$ est contenu dans le 16δ -voisinage de C_g . \square

Corollaire 5.13. *Soit $x \in X$ et g une isométrie de X . Soit m le milieu d'une géodésique $[x, gx]$. Le point m est à distance au plus 26δ de C_g .*

Démonstration. On note $y \in C_g$ une δ -projection de x sur C_g . Puisque les triangles de X sont 4δ -étroits, le point m est à distance au plus 8δ de la réunion $[x, y] \cup [y, gy] \cup [gy, y]$ (faire un dessin!). Supposons d'abord que m est à distance 8δ de $[y, gy]$. Rappelons que C_g est invariant sous l'action de g . Par conséquent, les points y et gy sont dans C_g qui, d'après la [Proposition 5.12 \(iii\)](#), est 16δ -quasi-convexe. Aussi le point m est à distance au plus 24δ de C_g . Supposons maintenant que m

est à distance 8δ d'un point p sur $[x, y]$. Puisque C_g est stable par g , le point gy est une δ -projection de gx sur C_g . D'après la Proposition 5.12 (i) on a

$$d(gx, x) \geq 2d(x, y) + \|g\| - 20\delta \geq 2d(x, y) - 20\delta.$$

Ainsi

$$d(x, p) \geq d(x, m) - 8\delta \geq d(x, y) - 18\delta$$

Le point p étant sur la géodésique $[x, y]$, la distance $d(p, y)$ est majorée par 18δ . L'inégalité triangulaire nous donne alors

$$d(m, y) \leq d(m, p) + d(p, m) \leq 26\delta.$$

En particulier m est à distance au plus 26δ de C_g . La preuve fonctionne de même si m est à distance au plus 8δ d'un point de $[gy, gx]$. \square

5.4 Études des isométries selon leur type

Isométries elliptiques. Par définition une isométrie g de X est elliptique si ses orbites sont bornées. On va voir qu'en fait une telle isométrie admet toujours une petite orbite (dont le diamètre est environ de l'ordre de δ). Pour démontrer ce fait on introduit le centre de la boule circonscrite d'une partie bornée.

Soit Y une partie bornée de X . Pour tout $x \in X$, on pose

$$r_Y(x) = \inf \{r \in \mathbb{R}_+ \mid Y \subset B(x, r)\}.$$

Ici $B(x, r)$ désigne la boule (ouverte) de centre x et de rayon r . Le rayon de la boule circonscrite de Y est la quantité

$$r_Y = \inf_{x \in X} r(x).$$

Ce rayon r_Y n'est pas atteint pour un point $x \in X$. Toutefois la proposition suivante nous dit que deux qui réalisent presque r_Y sont en fait proche... ce qui est amplement suffisant pour étudier l'action à large échelle de g .

Proposition 5.14. *Soit Y une partie bornée de X . Soit $\eta > 0$. Soient $x, x' \in X$ tels que*

$$\max\{r_Y(x), r_Y(x')\} \leq r_Y + \eta.$$

Alors $d(x, x') \leq 2\eta + 4\delta$.

Démonstration. Notons m le milieu d'une géodésique $[x, x']$. Soit y un point de Y . D'après l'inégalité à quatre points (4) on a

$$d(x, x') + d(y, m) \leq \max\{d(x, y) + d(x', m), d(x', y) + d(x, m)\} + 2\delta.$$

Rappelons que $d(x, m) = d(x', m) = d(x, x')/2$. Ainsi on obtient

$$\frac{1}{2}d(x, x') + d(y, m) \leq \max\{r_Y(x), r_Y(x')\} + 2\delta \leq r_Y + \eta + 2\delta.$$

Cette inégalité est valide pour tout les points $y \in Y$. Aussi

$$r_Y \leq r_Y(m) \leq r_Y - \frac{1}{2}d(x, x') + \eta + 2\delta,$$

d'où il vient $d(x, x') \leq 2\eta + 4\delta$. \square

Corollaire 5.15. *Soit g une isométrie de X . Si g est elliptique alors g admet une orbite de diamètre au plus 6δ .*

Démonstration. Soit $y \in X$. On note $Y = \{g^k y \mid k \in \mathbb{Z}\}$, l'orbite de g . Par définition c'est un ensemble borné. Fixons $x \in X$ tel que $r_Y(x) \leq r_Y + \delta$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Puisque Y est invariant sous l'action de g et donc de g^m , le point $g^m x$ vérifie aussi $r_Y(g^m x) \leq r_Y + \delta$. Il découle du lemme précédent que $d(g^m x, x) \leq 6\delta$. Ainsi l'orbite de x sous l'action de g est de diamètre au plus 6δ . \square

Remarque. Le résultat énoncé est en fait plus général. En effet supposons que G est un groupe agissant par isométries sur X dont les orbites sont bornées. Alors G admet une orbite de diamètre au plus 6δ (exercice).

Isométries loxodromiques.

Proposition 5.16. *Soit $x \in X$. Un isométrie g de X est loxodromique si et seulement si l'application orbite $\mathbb{Z} \rightarrow X$ qui envoie n sur g^n est un plongement quasi-isométrique.*

Démonstration. Supposons d'abord que g est loxodromique. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on

$$|n| \cdot \|g\|_\infty \leq d(g^n x, x) \leq |n| d(gx, x)$$

La dernière inégalité est une application de l'inégalité triangulaire. Aussi pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, il vient

$$|p - q| \cdot \|g\|_\infty \leq d(g^p x, g^q x) \leq |p - q| d(gx, x)$$

Comme $\|g\|_\infty > 0$, l'application orbite est un plongement quasi-isométrique. Supposons maintenant que l'application orbite est un plongement (κ, ℓ) -quasi-isométrique (avec $\kappa \geq 1$ et $\ell \geq 0$). En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(g^n x, x) \geq \kappa^{-1}n - \ell$. En divisant par n et en passant à la limite, on obtient $\|g\|_\infty \geq \kappa^{-1} > 0$. Donc g est loxodromique. \square

Remarque. La preuve précédente nous dit que si $x \in X$ est dans l'ensemble caractéristique C_g de g alors l'application $\mathbb{Z} \rightarrow X$ qui envoie n sur g^n est un plongement $(\kappa, 0)$ -quasi-isométrique où la constante

$$\kappa = \max \left\{ \frac{1}{\|g\|_\infty}, \|g\| + 10\delta \right\}.$$

ne dépend pas du point x dans C_g .

Corollaire 5.17. *Soit g une isométrie de X . Si g est loxodromique alors son ensemble caractéristique C_g est quasi-isométrique à \mathbb{R} .*

Démonstration. Soit $x \in C_g$. On se donne une géodésique $\gamma: [0, T] \rightarrow X$ entre x et gx . On étend γ en un chemin bi-infini g -invariant $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$ en posant $\gamma(mT + t) = g^m \gamma(t)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, pour tout $t \in [0, T)$. Il découle de l'observation précédente que γ est une (κ, ℓ) -quasi-géodésique où κ et ℓ sont des paramètres qui ne dépendent que de g et non du point x . En particulier γ est quasi-isométrique à \mathbb{R} . Il suffit donc de montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que tout point de C_g est à distance au plus R de γ . Notons $D = D(\kappa, \ell, \delta)$ la constante donnée par la stabilité des quasi-géodésiques ([Théorème 4.7](#)). Soit $y \in X$ un autre point de C_g . On se fixe une géodésique $\nu: [0, S] \rightarrow X$ reliant y et gy . En suivant le même procédé que pour γ , on étend ν en une (κ, ℓ) -quasi-géodésique bi-infinie,

invariante sous l'action de g . On pose $d = d(x, y) = d(\gamma(0), \nu(0))$. Prenons $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $d(g^n y, y) = d(\nu(nS), \nu(0)) > d + D + 8\delta$. D'après la stabilité des quasi-géodésiques, le point y est à distance au plus D de la géodésique $[g^{-n}y, g^n y]$. Puisque les triangles de X sont 4δ -étroits, cette dernière est dans le 8δ -voisinage de $[g^{-n}y, g^{-n}x] \cup [g^{-n}x, g^n x] \cup [g^n x, g^n y]$. En particulier, y est à distance au plus $D + 4\delta$ d'un point z sur $[g^{-n}y, g^{-n}x] \cup [g^{-n}x, g^n x] \cup [g^n x, g^n y]$. On affirme que ce point z ne peut pas se trouver sur $[g^n x, g^n y]$. En effet, l'inégalité triangulaire entraînerait que

$$d(y, g^n y) \leq d(y, z) + d(z, g^n y) \leq d(y, z) + d(g^n x, g^n y) \leq d(y, z) + d(x, y) \leq d + D + 8\delta,$$

ce qui contredirait notre choix de n . Par symétrie, z ne peut pas non plus se trouver sur $[g^{-n}y, g^{-n}x]$. Par conséquent y est à distance au plus $D + 8\delta$ d'un point de $[g^{-n}x, g^n x]$. Rappelons que $g^{-n}x$ et $g^n x$ sont deux points sur γ . D'après la stabilité des quasi-géodésiques, $[g^{-n}x, g^n x]$ est contenue dans le D -voisinage de γ . Ainsi le point y est à distance au plus $R = 2D + 8\delta$ de γ , ce qui termine la preuve. \square

On va maintenant donner une condition suffisante simple pour montrer qu'une isométrie est loxodromique. On rappelle le phénomène de passage local-global étudié en devoir maison.

Lemme 5.18. *Soit x_0, x_1, \dots, x_m une suite de points de X . Soit $a > 0$. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ on a*

$$\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < \frac{1}{2} \min \{d(x_i, x_{i-1}), d(x_i, x_{i+1})\} - a - \delta$$

Alors pour tout $i, j \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a $d(x_i, x_j) \geq 2a|i - j|$.

Proposition 5.19. *Soit g une isométrie de X . On suppose qu'il existe un point $x \in X$ tel que*

$$\langle g^{-1}x, gx \rangle_x < \frac{1}{2}d(gx, x) - \delta.$$

Alors g est loxodromique.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on note x_n le point $x_n = g^n x$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

- ▶ $d(x_n, x_{n+1}) = d(gx, x)$.
- ▶ $\langle x_{n-1}, x_{n+1} \rangle_{x_n} = \langle g^{-1}x, gx \rangle_x$.

Notre hypothèse dit donc que la suite (x_n) vérifie les conditions du [Lemme 5.18](#) pour un nombre a tel que

$$0 < a < \frac{1}{2}d(gx, x) - \langle g^{-1}x, gx \rangle_x - \delta.$$

Par conséquent l'application orbite $\mathbb{Z} \rightarrow X$ qui envoie n sur $g^n x$ est un plongement quasi-isométrique. En effet pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a

$$2a|p - q| \leq d(g^p x, g^q x) \leq |p - q| d(gx, x)$$

La première inégalité vient du [Lemme 5.18](#), la seconde découle de l'inégalité triangulaire. La [Proposition 5.16](#) assure alors que g est loxodromique. \square

Isométries paraboliques. Les isométries paraboliques peuvent être vu comme un cas « limite » entre elliptique et loxodromique. On peut illustrer cette idée dans le plan hyperbolique. On rappelle que le demi-plan de Poincaré est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

On peut aussi le voir comme l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire strictement positive. Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit par isométries sur \mathbb{H} de la manière suivante. Si $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est représenté par la matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors gz est le point représenté par le nombre complexe

$$gz = \frac{az + b}{cz + d}$$

L'isométrie g est alors elliptique (respectivement parabolique, loxodromique) si et seulement si $\mathrm{tr}(g) > 2$ (respectivement $\mathrm{tr}(g) = 2$, $\mathrm{tr}(g) < 2$).

Considérons maintenant un groupe hyperbolique G engendré par une partie finie S . Il agit par isométrie sur son graphe de Cayley qui est par définition un espace hyperbolique. En tant qu'isométries de $\mathrm{Cay}(G, S)$, les éléments de g sont priori elliptiques, paraboliques ou loxodromiques. En fait G ne contient pas d'isométries paraboliques. Plus précisément on va montrer le résultat suivant.

Théorème 5.20. *Soit X un espace métrique propre δ -hyperbolique. Soit G un groupe agissant par isométries de manière proprement discontinue et co-compacte sur X . Les éléments de G sont*

- ▶ elliptiques et d'ordre fini, ou
- ▶ loxodromiques et d'ordre infini.

La preuve du théorème repose sur le lemme technique suivant

Lemme 5.21. *Soit $x \in X$. Soient g et h deux isométries de X qui ne sont pas loxodromiques. Si*

$$\langle gx, hx \rangle_x < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - 2\delta.$$

alors gh est loxodromique.

Todo. Faire un dessin !

Démonstration. Posons $u = gh$. On va utiliser le critère de la [Proposition 5.16](#) et montrer que l'orbite de x sous l'action de $\langle u \rangle$ un plongement quasi-isométrique de \mathbb{Z} dans X . Pour cela on définit une suite de point (x_n) de la manière suivante. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$x_{2k} = u^k x \quad \text{et} \quad x_{2k+1} = u^k gx.$$

Ainsi l'application orbite $\mathbb{Z} \rightarrow X$ envoie k sur x_{2k} . Il suffit donc de montrer qu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ on a

$$a|p - q| \leq d(x_p, x_q) \leq b|p - q|.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$d(x_p, x_q) \leq |p - q| \max \{d(gx, x), d(hx, x)\}.$$

On peut donc choisir $b = \max\{d(gx, x), d(hx, x)\}$. Pour minorer la distance $d(x_p, x_q)$, on va exploiter le [Lemme 5.18](#). Remarquons pour commencer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\min \{d(x_k, x_{k-1}), d(x_k, x_{k+1})\} = \min \{d(gx, x), d(hx, x)\}.$$

Par ailleurs

$$\langle x_{k-1}, x_{k+1} \rangle_{x_k} = \begin{cases} \langle g^{-1}x, hx \rangle_x & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \langle h^{-1}x, gx \rangle_x & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il nous faut donc majorer $\langle g^{-1}x, hx \rangle_x$ et $\langle h^{-1}x, gx \rangle_x$ en fonction de $d(gx, x)$ et $d(hx, x)$. En combinant l'inégalité à quatre point [\(3\)](#) avec notre hypothèse on remarque que

$$\min \{ \langle gx, g^{-1}x \rangle_x, \langle g^{-1}x, hx \rangle_x \} \leq \langle gx, hx \rangle_x + \delta < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - \delta. \quad (12)$$

Notons que le minimum ne peut pas être atteint par $\langle gx, g^{-1}x \rangle_x$. En effet sinon on aurait

$$\langle gx, g^{-1}x \rangle_x < \frac{1}{2}d(gx, x) - \delta,$$

ce qui d'après la [Proposition 5.19](#) contredit le fait que g n'est pas loxodromique. Le minimum dans [\(12\)](#) est donc atteint par $\langle g^{-1}x, hx \rangle_x$, ce qui se réécrit

$$\langle g^{-1}x, hx \rangle_x < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - \delta.$$

De la même façon, on observe que

$$\langle h^{-1}x, gx \rangle_x < \frac{1}{2} \min \{d(gx, x), d(hx, x)\} - \delta.$$

On a donc démontré qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle x_{k-1}, x_{k+1} \rangle_{x_k} < \frac{1}{2} \min \{d(x_k, x_{k-1}), d(x_k, x_{k+1})\} - a - \delta.$$

Il découle du [Lemme 5.18](#) que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $d(x_p, x_q) \geq 2a|p - q|$, ce qui termine la preuve. \square

Proposition 5.22. *Soit X un espace métrique propre δ -hyperbolique. Soit G un groupe agissant par isométries de manière proprement discontinue et co-compacte sur X . Soit H un sous-groupe de G . Si les orbites de H ne sont pas bornées alors H contient un élément loxodromique.*

Démonstration. On commence par démontrer le fait suivant. Il existe $K \in \mathbb{N}$ ayant la propriété suivantes : pour tout $x \in X$, l'ensemble

$$S(x) = \{g \in G \mid d(gx, x) \leq 200\delta\}$$

contient au plus N élément. Fixons un point base $x_0 \in X$. Puisque l'action de G sur X est co-compacte, il existe un rayon $r \in \mathbb{R}_+$ de sorte que $G \cdot B(x_0, r)$ couvre X . Autrement dit tout point de X est à distance a plus r d'un point de l'orbite de x_0 . Par ailleurs l'action de G sur X est co-compacte. Aussi l'ensemble

$$U = \{g \in G \mid gB(x_0, r + 200\delta) \cap B(x_0, r + 200\delta) \neq \emptyset\}$$

est fini. Notons K son cardinal. Prenons maintenant un point $x \in X$. Par définition de r , il existe $h \in G$ tel que $d(x, hx_0) \leq r$. Aussi pour tout $g \in S(x)$ l'inégalité triangulaire entraine

$$d(h^{-1}ghx_0, x_0) = d(ghx_0, hx_0) \leq d(ghx_0, gx) + d(gx, x) + d(x, hx_0) \leq 2r + 100\delta.$$

Autrement dit $h^{-1}gh$ est un élément de U . Ainsi la conjugaison par h envoie $S(x)$ dans un sous-ensemble de U . Donc $S(x)$ contient au plus K élément, ce qui démontre le fait avancé.

Montrons maintenant que H contient un élément loxodromique. La preuve se fait par l'absurde. On suppose donc que tous les éléments de H sont elliptique ou parabolique. On fixe un point $x \in X$. Pour tout $h \in H$, on note y_h le milieu de $[x, hx]$. On va montrer que qu'il existe des éléments $h \in H$ tel que le cardinal de $S(y_h)$ est arbitrairement grand, ce qui contredira l'observation précédente. Pour cela on se donne deux éléments $h, u \in H$ tels que $d(hx, x) > 3d(ux, x)$. On affirme pour commencer que

$$|d(hx, x) - d(hux, x)| \leq 4\delta.$$

Il découle de notre hypothèse que $d(hux, x) \geq d(ux, x)$. Observons maintenant que que

$$\langle hx, x \rangle_{hux} = \langle u^{-1}x, u^{-1}h^{-1}x \rangle_x \geq \frac{1}{2} \min \{d(u^{-1}h^{-1}x, x), d(u^{-1}x, x)\} - 2\delta = \frac{1}{2}d(hux, hx) - 2\delta.$$

En effet si tel n'était pas le cas, le [Lemme 5.21](#) nous dirait que $u^{-2}h^{-1}$ est loxodromique, ce qui contredit notre hypothèse. En développant le produit de Gromov $\langle hx, x \rangle_{hux}$ dans l'inégalité précédente, il vient

$$d(hux, x) \geq d(hx, x) - 4\delta.$$

Le même raisonnement nous dit que

$$\langle hux, x \rangle_{hx} \geq \frac{1}{2}d(hux, hx) - 2\delta.$$

Ce qui entraine, développant le produit de Gromov,

$$d(hux, x) \geq d(hx, x) - 4\delta.$$

Ainsi $d(hx, x)$ et $d(hux, x)$ diffèrent d'au plus 4δ comme annoncé. Rappelons que y_h et y_{hu} sont les milieux respectifs de $[x, hx]$ et $[x, hux]$. Ainsi

$$|d(x, y_h) - d(x, y_{hu})| \leq 2\delta. \tag{13}$$

L'inégalité triangulaire combinée avec l'hypothèse $d(hx, x) > 3d(ux, x)$ entraîne que

$$\langle hx, hu x \rangle_x \geq \frac{1}{2} \min \{d(x, hx), d(x, hu x)\} \geq \frac{1}{2} \min \{d(x, y_h), d(x, y_{hu})\}. \quad (14)$$

En combinant (13) et (14) avec l'inégalité (5) on observe que la distance entre les points y_h et y_{hu} est au plus 6δ . Puisque y_h et y_{hu} sont à distance les milieux de $[x, hx]$ et $[x, hu x]$, ces points sont dans le 26δ -voisinage de C_h et C_{hu} respectivement (Corollaire 5.13). Par ailleurs puisque hu n'est loxodromique $\|h\| \leq 8\delta$ et $\|hu\| \leq 8\delta$ (Lemme 5.1). Il découle alors de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} d(hy_h, y_h) &\leq \|h\| + 62\delta \leq 70\delta \\ d(huy_{hu}, y_{hu}) &\leq \|hu\| + 62\delta \leq 70\delta \end{aligned}$$

Autrement dit y_h (respectivement y_{hu}) est presque fixé par h (respectivement hu). Comme ces deux points sont proches y_h est presque fixé par hu et donc u . Formellement l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} d(uy_h, y_h) = d(huy_h, hy_h) &\leq d(huy_h, huy_{hu}) + d(huy_{hu}, y_{hu}) + d(y_{hu}, y_h) + d(y_h, hy_h) \\ &\leq 2d(y_h, y_{hu}) + d(huy_{hu}, y_{hu}) + d(y_h, hy_h). \end{aligned}$$

Lors de notre étude on a majoré chacun des termes de la dernière ligne en fonction de δ . On obtient donc $d(uy_h, y_h) \leq 152\delta$. Autrement dit u appartient à $S(y_h)$.

On va maintenant utiliser le fait que les orbites de H sont non bornées. En particulier, on peut trouver une suite d'éléments deux à deux distincts (h_n) dans H tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(h_{n+1}x, x) > 3d(h_n x, x)$. La discussion précédente montre que pour un entier n fixé, tous les éléments h_k , avec $k \leq n$ appartiennent à $S(y_{h_n})$. En particulier le cardinal de $S(y_{h_n})$ est au moins n . Cela contredit le fait que le cardinal de $S(y)$ est bornée indépendamment du point y . Donc H contient un élément loxodromique. \square

On peut maintenant démontrer le [Théorème 5.20](#)

Démonstration du Théorème 5.20. Soit $g \in G$. Supposons d'abord que g est elliptique, c'est à dire que toute orbite de $\langle g \rangle$ est bornée. En particulier il existe $x \in X$ et $R \geq 0$ tel que la suite $(g^n x)$ est contenue dans $B(x, R)$. Comme l'action de G sur X est proprement discontinue la suite (g^n) prend deux fois la même valeur. Il en découle que g est d'ordre fini. Supposons maintenant que g n'est pas elliptique. En appliquant la [Proposition 5.22](#) au sous-groupe $\langle g \rangle$ on montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que g^n est loxodromique. En particulier g lui-même est loxodromique ([Exercice 5.3](#)) et donc d'ordre infini. \square

Exercice 5.23. Soit G un groupe hyperbolique.

- (i) Montrer que à conjugaison près, G admet un nombre fini d'élément d'ordre fini.
- (ii) Plus généralement, montrer que à conjugaison près, G admet un nombre fini de sous-groupes finis.

Exercice 5.24. Soit G un groupe hyperbolique et X son graphe de Cayley. Soit g un élément loxodromique de G et $N(g)$ le normalisateur de $\langle g \rangle$ dans G .

- (i) Montrer que pour tout $u \in N(g)$, on a $ugu^{-1} = g^{\pm 1}$ (on pourra comparer les longueurs de translation stable de g et ugu^{-1}).

- (ii) Montrer que l'ensemble caractéristique C_g est invariant sous l'action de $N(g)$.
- (iii) On fixe un point $x \in X$. Montrer qu'il existe $D \geq 0$ tel que pour tout $u \in N(g)$ le point ux est à distance au plus D d'un point de $\langle g \rangle \cdot x$ (on pourra s'inspirer de la preuve du [Corollaire 5.17](#)).
- (iv) En déduire que $\langle g \rangle$ est un sous-groupe d'indice fini de $N(g)$.

Plus généralement, on note $E(g)$ l'ensemble

$$E(g) = \{u \in G \mid \exists k \in \mathbb{N}, ug^k u^{-1} = g^{\pm k}\}$$

- (v) Montrer que $E(g)$ est un sous-groupe G .
- (vi) Montrer que $E(g)$ est l'ensemble des éléments $u \in G$ tel que la distance de Hausdorff entre C_g et uC_g est bornée.
- (vii) Montrer que $\langle g \rangle$ est un sous-groupe d'indice fini de $E(g)$ (on pourra s'inspirer de l'étude précédente).

Exercice 5.25. Soit G un groupe hyperbolique. Montrer que G ne peut pas contenir de sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 (on pourra utiliser l'exercice [5.24](#)). Montrer que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ est hyperbolique si et seulement si $n = 2$.

Exercice 5.26. Soit G un groupe hyperbolique. On dit qu'un élément $g \in G$ est *primitif* si g n'est pas une puissance propre d'un autre élément, autrement dit si pour tout $u \in G$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'égalité $g = u^n$ entrain $n = 1$. Montrer que tout élément d'ordre infini $g \in G$ est une puissance d'un élément primitif (on pourra utiliser l'exercice [5.24](#)).

5.5 Le bord à l'infini d'un espace hyperbolique.

Étant donné un espace hyperbolique X propre on peut lui associer un *bord à l'infini* ∂X de sorte que la réunion $X \cup \partial X$ est un espace topologique compacte et X est dense dans \bar{X} . Pour une définition précise du bord à l'infini ∂X de X on renvoie à [\[3, Chapitre 2\]](#) ou [\[8, Chapitres 6 et 7\]](#). Si g est une isométrie de X , son action sur X induit un homeomorphisme de ∂X . On peut alors caractériser les isométries de X (elliptique, parabolique, loxodromique) grâce au propriétés dynamiques de l'action de g sur $X \cup \partial X$:

- (i) g est elliptique si et seulement si ses orbites dans X sont bornées (c'est la définition !)
- (ii) g est parabolique si et seulement si l'orbite d'un point $x \in X$ admet un unique point d'accumulation dans ∂X .
- (iii) g est loxodromique si et seulement si l'orbite d'un point $x \in X$ admet exactement deux points d'accumulation dans ∂X .

On pourra consulter [\[3, Chapitres 9 et 10\]](#) et [\[8, Chapitres 8\]](#).

6 Théorie de la petite simplification

On va maintenant étudier une méthode à la fois souple et puissante pour produire des groupes hyperboliques. On commencera par le cadre « historique » dont l'origine remonte aux travaux de M. Dehn sur les surfaces au début du XXI^{ème} siècle. On verra ensuite comment généraliser cette construction pour des groupes agissant sur un espace hyperbolique.

6.1 Définition et premiers exemples.

Rappel. On rappelle qu'un groupe G est de *présentation finie* s'il existe un ensemble fini à S et une partie finie R du groupe libre $\mathbf{F}(S)$ tel que G est isomorphe au quotient $\mathbf{F}(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$ où $\langle\langle R \rangle\rangle$ est le sous-groupe normal de $\mathbf{F}(S)$ engendré par R . Dans ce cas on dit que $\langle S \mid R \rangle$ est *une* présentation de G .

Un mot $w = s_0 s_1 \dots s_n$ sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ est dit *cycliquement réduit* si pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$. Autrement dit non seulement deux lettres consécutives ne sont pas inverse l'une de l'autre (le mot est donc réduit) mais la première lettre est aussi distincte de l'inverse de la dernière lettre. Tout élément de $\mathbf{F}(S)$ est conjugué à un élément qui peut être représenté par un mot cycliquement réduit (exercice). Ainsi lorsqu'on considère une présentation $\langle S \mid R \rangle$ d'un groupe G , on peut toujours supposer que les éléments de R sont des mots cycliquement réduits sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$. Si $w = s_0 s_1 \dots s_n$ est un mot cycliquement réduit, on appelle *conjugué cyclique* de w tout mot de la forme $w' = s_i s_{i+1} \dots s_n s_1 s_2 \dots s_{i-1}$, c'est à dire obtenu par permutation cyclique des lettres s_i . On notera que w et w' représentent des éléments conjugués de $\mathbf{F}(S)$. Si $w = s_0 s_1 \dots s_n$ est un mot sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$, sa *longueur* est définie par $|w| = n$.

A partir de maintenant on fixe un groupe G donné par une présentation finie $\langle S \mid R \rangle$, dont on suppose que tous les éléments de R sont des mots cycliquement réduits. On note R^* l'ensemble des conjugués *cycliques* des éléments de $R \cup R^{-1}$. Un *pièce* est un mot p de sorte qu'il existe deux éléments distincts $r_1, r_2 \in R^*$ dont p est un préfixe. Autrement dit une pièce est un sous-mot qui peut se simplifier lorsqu'on forme un produit de la forme $r_1 r_2$ avec $r_1, r_2 \in R^*$.

Définition 6.1. Étant donné un nombre réel $\lambda \in (0, 1)$, on dit que la présentation $\langle S \mid R \rangle$ satisfait la *condition de petite simplification* $C''(\lambda)$ si

$$\sup_{p \text{ pièce}} |p| < \lambda \inf_{r \in R} |r|.$$

Autrement dit la longueur de la plus grande pièce est majorée par λ fois la longueur de la plus petite relation. On va s'intéresser à des cas où $\lambda \ll 1$. Ainsi dans un produit $r_1 r_2$ avec $r_1, r_2 \in R^*$ seul un tout petit sous-mot peut se simplifier d'où le terme de « petite simplification ».

Remarque. Il existe de nombreuses variations de la condition $C''(\lambda)$. Par exemple la condition (plus faible) $C'(\lambda)$ impose qu'une pièce soit de longueur au plus λ fois la taille de la relation *qui la contient*. Dans la plupart des applications, toutes les relations auront approximativement la même longueur. La condition $C''(\lambda)$ est donc largement suffisante pour nos besoins. Pour une approche combinatoire de la théorie de la petite simplification, on pourra consulter le livre de Lyndon et Schupp [11].

Exemples.

- (i) Le groupe fondamental d'une surface
- Σ
- de genre
- g
- admet la présentation suivante :

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle.$$

Cette présentation vérifie la condition $C''(\lambda)$ pour tout $\lambda > 1/4g$. En effet la seule relation est de taille $4g$. Toutes les pièces sont de longueur au plus 1 (exercice).

- (ii) Le produit libre
- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- est caractérisé par la présentation

$$G = \langle a, b \mid a^n, b^m \rangle.$$

Cette présentation vérifie la condition $C''(1/p)$ ou $p = \min\{n, m\}$.

- (iii) Plus généralement si
- R
- est un ensemble de mots cycliquement réduits sur l'alphabet
- $S \cup S^{-1}$
- tel que
- $\langle S \mid R \rangle$
- vérifie l'hypothèse
- $C''(\lambda)$
- alors la présentation

$$\langle S \mid r^n, r \in R \rangle$$

Vérifie $C''(\mu)$ dès que $\mu > \max\{\lambda, 1/n\}$.

Les groupes à petite simplification sont apparus dans les années 60 bien avant l'émergence des groupes hyperboliques. Pourtant l'énoncé suivant est un des résultats fondamentaux de la théorie de la petite simplification.

Théorème 6.2. *Soit $\lambda \in (0, 1/6)$. Si $G = \langle S \mid R \rangle$ est un groupe donnée par une présentation vérifiant la condition $C''(\lambda)$ alors G est hyperbolique.*

Ce théorème sera démontré plus tard dans un cadre plus général. En attendant on se concentre sur certaines applications.

6.2 Généricité des groupes hyperboliques

Le résultat suivant illustre la flexibilité de cette méthode : presque « tous » les groupes sont à petite simplification. Pour formaliser cette idée on a besoin de quelques notations. On fixe une fois pour toute un système de générateur $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ contenant m éléments. Fixons deux entiers $N, L \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{G}_N(L)$ l'ensemble des groupes admettant une présentation de la forme suivante

$$\langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_N \rangle$$

où r_1, \dots, r_N sont N mots cycliquement réduits de longueur L sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$. Si L est fixé on muni l'ensemble de mots cycliquement réduits de longueur L de la loi de probabilité uniforme. Elle induit une loi de probabilité sur $\mathcal{G}_N(L)$ (chaque relation r_i est tiré au hasard selon la loi uniforme). L'énoncé ci-dessous répond à la question suivante : quelle est la probabilité qu'un groupe de $\mathcal{G}_N(L)$ soit hyperbolique.

Théorème 6.3. *Soit $\lambda \in (0, 1)$. On note $\mathbb{P}(L)$ la probabilité de l'événement suivant : un groupe de $\mathcal{G}_N(L)$ admet une présentation satisfaisant la condition $C''(\lambda)$. Il existe $A, c > 0$ tel que $\mathbb{P}(L) \geq 1 - Ae^{-cN}$.*

Autrement dit pour L suffisamment grand presque tous les groupes de $\mathcal{G}_N(L)$ sont hyperboliques !

Démonstration. On commence par estimer le nombres de mots cycliquement réduits de longueur L . On rappelle que S contient m éléments. Pour écrire un mot cycliquement réduit $w = s_1 s_2 \dots s_L$ on a

- (i) $2m$ choix pour la première lettre
- (ii) $2m - 1$ choix pour chaque lettre s_i , avec $2 \leq i \leq m - 1$ (chacune de ses lettres ne peut être l'inverse de la précédente).
- (iii) $2m - 2$ ou $2m - 1$ choix pour la dernière lettre (la dernière lettre ne doit pas être l'inverse ni de la première lettre ni de l'antépénultième).

En particulier le nombre $C(L)$ de mots cycliquement réduits de longueur L encadré de la manière suivante

$$2m(2m - 2)(2m - 1)^{L-2} \leq C(L) \leq 2m(2m - 1)^{L-1}$$

Le point important est que cette quantité se comporte asymptotiquement comme $(2m - 1)^L$ lorsque L tend vers l'infini. Le nombre de présentation de la forme $\langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_N \rangle$ où r_1, \dots, r_N sont N mots cycliquement réduits de longueur L est donc

$$C(L)^N \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} (2m - 1)^{NL}.$$

On fixe maintenant $\lambda \in (0, 1)$. On va compter le nombre de telles présentations qui *ne satisfont pas* la condition $C''(\lambda)$. Il existe donc une pièce p de longueur $\ell = \lceil \lambda L \rceil$ qui apparaît dans deux conjugués cyclique différentes de r_1, \dots, r_N . On va distinguer plusieurs cas selon que la pièce p apparaît dans des conjugués cyclique de relation distinctes ou non.

Cas 1. *La pièce p est un sous mot de deux relations distinctes $r_i^{\pm 1}$ et $r_j^{\pm 1}$.* On va estimer (brutalement) le nombre de présentation de cette forme. Pour former une telle présentation on a

- (i) $2m(2m - 1)^{\ell-1}$ choix pour la pièce p ;
- (ii) C_N^2 choix pour les indices i et j ;
- (iii) au plus $2L$ choix pour le conjugué cyclique de $r_i^{\pm 1}$ contenant p comme préfixe. Idem pour $r_j^{\pm 1}$;
- (iv) au plus $(2m - 1)^{L-\ell}$ pour compléter la relation r_i (ℓ lettres dans cette relation sont imposées par p);
- (v) $C(L)^{N-2}$ choix pour les $N - 2$ relations restantes.

Le nombre $D_1(L)$ de présentations contenant un pièce de longueur ℓ dans deux relations distinctest donc majoré de la manière suivante

$$D_1(L) \leq A_1 L^2 (2m - 1)^{-\ell + NL}.$$

où A est une constante qui ne dépend pas de L .

Cas 2. La pièce p apparaît sur deux conjugués cyclique de la même relation $r_i^{\pm 1}$. La relation r_i étant cycliquement réduite, on peut y penser comme un cercle étiqueté par des lettres. Deux portions de ce cercle sont étiquetées par p (faire un dessin). On doit à nouveau distinguer deux cas selon que les deux occurrences de p sur ce cercle se chevauchent ou non.

Cas 2.1 Les deux occurrences de p ne se chevauchent pas. Pour former une telle présentation on a donc

- (i) $2m(2m-1)^{\ell-1}$ choix pour la pièce p ;
- (ii) N choix pour l'indice i ;
- (iii) au plus $4L^2$ choix pour les deux conjugués cycliques de $r_i^{\pm 1}$ contenant p comme préfixe;
- (iv) au plus $(2m-1)^{L-2\ell}$ pour compléter la relation r_i (2ℓ lettres dans cette relation sont imposées par les deux occurrences de p);
- (v) $C(L)^{N-1}$ choix pour les $N-2$ relations restantes.

Le nombre $D_2(L)$ de présentations contenant un pièce de longueur ℓ dans une même relation, mais sans chevauchement est donc majoré de la manière suivante

$$D_2(L) \leq A_2 L^2 (2m-1)^{-\ell+NL}.$$

où A_2 est une constante qui ne dépend pas de L .

Cas 2.2 Les deux occurrences de p se chevauchent. On observe dans un premier temps que p ne peut pas être un préfixe d'un conjugué cyclique de r_i et d'un conjugué cyclique de r_i^{-1} . Il en découle que p admet en tant que mot deux écritures : $p = uv$ et $p = vw$ où v correspond à la partie où les deux occurrences de p se chevauchent. On note k la longueur de u . C'est un entier strictement positif. On observe que p est entièrement déterminé par la donnée de u . Pour former une telle présentation on a donc

- (i) ℓ choix pour la longueur k du préfixe u .
- (ii) $2m(2m-1)^{k-1}$ choix pour le mot u ;
- (iii) N choix pour l'indice i ;
- (iv) au plus $2L^2$ choix pour les deux conjugués cycliques de $r_i^{\pm 1}$ contenant p comme préfixe;
- (v) au plus $(2m-1)^{L-\ell-k}$ pour compléter la relation r_i ($\ell+k$ lettres dans cette relation sont imposées par les deux occurrences de p);
- (vi) $C(L)^{N-1}$ choix pour les $N-2$ relations restantes.

Le nombre $D_3(L)$ de présentations contenant un pièce de longueur ℓ dans une même relation, mais sans chevauchement est donc majoré de la manière suivante

$$D_3(L) \leq A_3 L^2 (2m-1)^{-\ell+NL}.$$

où A_3 est une constante qui ne dépend pas de L .

Au final, le nombre $D(L)$ de présentation ne satisfaisant pas la condition $C''(\lambda)$ est majoré par

$$D(L) = AL^2(2m-1)^{-\ell+NL} \leq AL^2(2m-1)^{-\lambda L}$$

où A est une constante qui ne dépend pas de L . On se souvient que le nombre de présentation de la forme $\langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_N \rangle$ où r_1, \dots, r_N sont N mots cycliquement réduits de longueur L se comporte asymptotiquement comme $(2m-1)^L$. Aussi Il existe une constante B (qui ne dépend pas de L) tel que

$$\mathbb{P}(L) \geq 1 - CL^2(2m-1)^{-\lambda L}.$$

D'où le résultat. □

6.3 Construction de Rips

La « morale » de la partie précédente est la suivante : dès qu'on écrit une présentation avec des mots un tant soit peu « compliqués », alors la présentation obtenue a de forte chance de vérifier les hypothèses de petite simplification. La construction de Rips est un autre exemple concret de ce phénomène.

Proposition 6.4 (Construction de Rips). *Soit Q un groupe de présentation finie. Soit $\lambda \in (0, 1)$. Il existe un groupe G donné par une présentation satisfaisant la condition $C''(\lambda)$ et un sous-groupe N de G de type fini, normal dans G tel que Q est isomorphe à G/N .*

Remarques En particulier si on choisit λ suffisamment petit, le groupe G est hyperbolique. Dire que Q est le quotient d'un groupe hyperbolique n'a rien d'extraordinaire : tout groupe de type fini est le quotient d'un groupe libre (qui est hyperbolique). Le point important est que le noyau N de la projection $G \rightarrow Q$ est de type fini. En général on présente le résultat sous la forme d'une suite exacte courte

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1,$$

ce qui est une autre manière de dire que Q est isomorphe à G/N .

Démonstration. On fixe une présentation finie de Q

$$Q = \langle a_0, \dots, a_{p-1} \mid r_0, \dots, r_{n-1} \rangle$$

On va définir le groupe G en termes de générateurs et relations. Pour cela on se donne deux lettres supplémentaires x et y . Le groupe G aura une présentation de la forme

$$G = \langle a_0, \dots, a_{p-1}, x, y \mid R \rangle,$$

ou R est un ensemble de mot sur l'alphabet $a_0^{\pm 1}, \dots, a_{p-1}^{\pm 1}, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}$ que l'on va maintenant préciser. Les relations de G vont être de deux types. Les premières assurent que le sous-groupe N de G engendré par x et y est normal. Les secondes relations assurent que le quotient G/N est isomorphe à Q . Pour définir ces relations on fixe deux entiers S et T . On y pense comme deux nombres gigantesques. On précisera leur valeur plus tard. Pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on définit quatre relations

$$\begin{aligned} a_i x a_i^{-1} &= x y^{S+4iT} x y^{S+4iT+1} x y^{S+4iT+2} \dots x y^{S+4iT+T-1} \\ a_i y a_i^{-1} &= x y^{S+(4i+1)T} x y^{S+(4i+1)T+1} x y^{S+(4i+1)T+2} \dots x y^{S+(4i+1)T+T-1} \\ a_i^{-1} x a_i &= x y^{S+(4i+2)T} x y^{S+(4i+2)T+1} x y^{S+(4i+2)T+2} \dots x y^{S+(4i+2)T+T-1} \\ a_i^{-1} y a_i &= x y^{S+(4i+3)T} x y^{S+(4i+3)T+1} x y^{S+(4i+3)T+2} \dots x y^{S+(4i+3)T+T-1} \end{aligned} \tag{15}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on définit une relation

$$r_j = xy^{S+(4p+j)T} xy^{S+(4p+j)T+1} xy^{S+(4p+j)T+2} \dots xy^{S+(4p+j)T+T-1} \quad (16)$$

L'ensemble des relations R définissant G est constitué des $4p+n$ relations données par (15) et (16).

On étudie maintenant les propriétés du groupe G obtenu ainsi. Notons N le sous-groupe de G engendré par x et y . Par définition c'est un sous-groupe de type fini. Il découle des relations (15) que N est normal. En effet N est normalisé par a_i pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Il est aussi évidemment normalisé par x et y . Puisque $a_0, \dots, a_{p-1}, x, y$ engendrent G , le sous-groupe N est normal dans G . Regardons maintenant le quotient G/N . Cela revient à « tuer » x et y dans G . Si on impose $x = y = 1$, alors les relations données par (15) deviennent vides. En revanche les relations données par (16) deviennent $r_j = 1$. Ainsi une présentation de G/N est

$$G/N = \langle a_0, \dots, a_{p-1} \mid r_0, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

Autrement dit G/N est isomorphe à Q . Il nous reste à démontrer que la présentation de G vérifie la condition $C''(\lambda)$ pour des valeurs de S et T . Pour cela analysons la forme de relations. Modulo une petite perturbation w (de la forme $a_i^\varepsilon x a_i^{-\varepsilon}$, $a_i^\varepsilon y a_i^{-\varepsilon}$ ou r_j) les relations sont un produits de mots de la forme xy^k . Ainsi si k est un entier fixé un u un mot en $a_0^{\pm 1}, \dots, a_{p-1}^{\pm 1}$, le sous-mot $xy^k u x$ n'apparaît au plus que dans une seule relation. Mieux encore il n'apparaît qu'une seule fois dans cette relation. Soient $r_1, r_2 \in R^*$. Supposons que r_1 et r_2 ont un préfixe commun p contenant deux occurrences de la lettre x . Il découle de notre discussion que $r_1 = r_2$. Autrement dit une pièce ne peut pas contenir plus de deux x . Sa longueur est donc majoré par $C+1+2K$, où C est la longueur du plus long mot dans l'ensemble

$$\{a_i x a_i^{-1}, a_i y a_i^{-1}, a_i^{-1} x a_i, a_i^{-1} y a_i, r_j \mid i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$$

et K est la plus grande puissance de y apparaissant dans une relation. On notera que C ne dépend ni de S ni de T . Aussi la longueur de la plus grand pièce est majorée par

$$\ell = C + 1 + 2S + 2(4p + n)T.$$

Dans chaque relation, le sous-mot y^S a T occurrences deux à deux disjointes. La longueur de la plus petite relation est donc minorée par

$$L = ST.$$

Autrement dit le rapport « plus grande pièce » / « plus petite relation » est majoré par

$$\frac{\ell}{L} = \frac{C + 1 + 2S + 2(4p + n)T}{ST} = \frac{C + 1}{ST} + \frac{2}{T} + \frac{4p + n}{S}$$

En choisissant S et T suffisamment grand on peut rendre ce rapport ℓ/L arbitrairement petit, en particulier inférieur à λ . Le présentation de G vérifie donc l'hypothèse de petite simplification $C''(\lambda)$. \square

On a vu précédemment que tout sous-groupe d'un groupe libre était libre. On ne peut malheureusement pas généraliser ce résultat au groupes hyperboliques.

Corollaire 6.5. *Il existe un groupe hyperbolique G contenant un sous-groupe H de type fini, qui n'est pas de présentation finie. En particulier H n'est pas un groupe hyperbolique.*

Pour cette preuve on admettra le résultat suivant. On note $\mathbf{F}(a_1, b_1)$ et $\mathbf{F}(a_2, b_2)$ deux copies du groupe libre \mathbf{F}_2 et $Q = \mathbf{F}(a_1, b_1) \times \mathbf{F}(a_2, b_2)$ leur produit direct. C'est un groupe de présentation finie. Soit $\varphi: Q \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme de groupe qui envoie a_1, b_1, a_2 et b_2 sur 1.

Proposition 6.6. *Le noyau K de φ est de type fini mais pas de présentation finie.*

Démonstration du Corollaire 6.5. On fixe $\lambda < 1/6$. On applique la construction de Rips avec le groupe $Q = \mathbf{F}(a_1, b_1) \times \mathbf{F}(a_2, b_2)$. Ainsi il existe un groupe hyperbolique G et un sous-groupe N de type fini de G qui est normal dans G tel que Q est isomorphe à G/N . On note $\pi: G \rightarrow G/N$ la projection canonique et $H = \pi^{-1}(K)$ la pré-image dans G du sous-groupe K donné par la Proposition 6.6. Puisque K est de type fini on fixe c_1, \dots, c_n une partie génératrice de K . Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on se donne une pré-image d_i de c_i dans G . Par ailleurs N est de type fini. On se donne donc x_1, \dots, x_p une partie génératrice de N (en fait on peut prendre $p = 2$). On observe que H est engendré par $x_1, \dots, x_p, d_1, \dots, d_n$ (exercice). Aussi H est de type fini. Supposons maintenant que H est de présentation finie. Une telle présentation s'écrit

$$H = \langle x_1, \dots, x_p, d_1, \dots, d_n \mid r_1, \dots, r_q \rangle,$$

où r_1, \dots, r_q sont des mots sur l'alphabet $x_1^{\pm 1}, \dots, x_p^{\pm 1}, d_1^{\pm 1}, \dots, d_n^{\pm 1}$. Par construction N est un sous-groupe normal de H et H/N est isomorphe à K . En terme de présentation on peut donc obtenir une présentation de K à partir d'une présentation de H en adjoignant toutes les relations de la forme $x_i = 1$. Autrement dit on « tue » tous les générateurs de N et donc le sous-groupe N entier. Ainsi une présentation de K est

$$K = \langle x_1, \dots, x_p, d_1, \dots, d_n \mid r_1, \dots, r_q, x_1, \dots, x_p \rangle,$$

qui est une présentation finie, ce qui contredit la Proposition 6.6. \square

Cet exemple illustre une application courante de la construction de Rips. Le monde des groupes est très sauvage. On peut y trouver toute sorte de créature avec des pathologies variées. En comparaison, la classe des groupes *hyperboliques* est beaucoup plus sage... Il faut cependant faire attention. En effet en utilisant la construction de Rips, on peut parfois ramener une pathologie d'un groupe Q quelconque (ici avoir un sous-groupe de type fini mais pas de présentation finie) dans le monde des groupes hyperboliques. Pour cette raison la construction de Rips est la source de nombreux contre-exemples.

6.4 Petite simplification dans un espace hyperbolique.

A première vue, la condition $C''(\lambda)$ est de nature combinatoire. On va maintenant expliquer comment y penser de manière géométrique. Cela nous permettra de généraliser considérablement le cadre de la théorie de la petite simplification.

Reformulation géométrique. On se rappelle que le but est d'étudier un groupe donné par une présentation finie de la forme $\langle S \mid R \rangle$. On fixe donc un ensemble fini S de générateurs et un ensemble fini de relation R vu comme sous-ensemble du groupe libre $\mathbf{F}(S)$. On voit R comme un

ensemble de mots réduits sur $S \cup S^{-1}$. Toutefois on ne demande pas pour le moment que les éléments de R soient cycliquement réduits. L'objectif est d'étudier le quotient $\tilde{G} = \mathbf{F}(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$.

Notons X le graphe de Cayley de $\mathbf{F}(S)$ relativement à S . On appelle x_0 le sommet de X qui correspond à l'identité. C'est un arbre simplicial, sur lequel G agit de manière propre et co-compacte. Tous les éléments de $\mathbf{F}(S)$ sont des isométries loxodromiques (en tant que groupe libre $\mathbf{F}(S)$ n'a pas d'éléments d'ordre fini). Considérons un élément $g \in \mathbf{F}(S)$ et C_g son axe (cf. Proposition 3.12). C'est une géodésique bi-infinie le long de laquelle g agit par translation de longueur $\|g\|$. En outre pour tout $u \in \mathbf{F}(S)$, l'axe de ugu^{-1} est uC_g (exercice). On notera que g est cycliquement réduit si et seulement si C_g passe par l'origine (exercice). Dans ce cas, la suite de points $(g^n x_0)$ est située sur C_g .

Supposons maintenant que g_1 et g_2 sont cycliquement réduits distincts de $\mathbf{F}(S)$ et p est un préfixe commun de g_1 et g_2 . On observe alors que la géodésique $[x_0, px_0]$ est incluse dans $C_{g_1} \cap C_{g_2}$ (faire le dessin du graphe de Cayley étiqueté par $S \cup S^{-1}$). En particulier la longueur de p est majorée par $\text{diam}(C_{g_1} \cap C_{g_2})$. Inversement considérons maintenant que g_1 et g_2 sont deux éléments quelconques de $\mathbf{F}(S)$ dont les axes sont distincts. L'intersection $C_{g_1} \cap C_{g_2}$ est alors une géodésique $[x, y]$ où x et y sont des sommets de X (exercice). En particulier $x = ux_0$ et $y = vx_0$ pour certains $u, v \in \mathbf{F}(S)$ (car l'action de $\mathbf{F}(S)$ sur les sommets de X est transitive). Aussi les axes $u^{-1}C_{g_1}$ et $u^{-1}C_{g_2}$ de $u^{-1}g_1u$ et $u^{-1}g_2u$ passent par x_0 (donc $u^{-1}g_1u$ et $u^{-1}g_2u$ sont cycliquement réduits) et leur intersection contient $u^{-1}[x, y] = [x_0, u^{-1}vx_0]$. On observe alors que $p = u^{-1}v$ est un préfixe commun de $u^{-1}g_1u$ et $u^{-1}g_2u$. Faire un dessin ! La longueur de ce préfixe est égale à $\text{diam}(C_{g_1} \cap C_{g_2})$.

La discussion précédente nous permet de reformuler géométriquement la condition $C''(\lambda)$. Pour cela on note \mathcal{Q} la famille suivante

$$\mathcal{Q} = \{(\langle uru^{-1} \rangle, uC_r) \mid r \in R, u \in \mathbf{F}(S)\}.$$

L'idée est de transformer R en une famille invariante par conjugaison. On observe en effet que le groupe G agit sur \mathcal{Q} de la manière suivante : $g(H, Y) = (gHg^{-1}, gY)$. En outre \mathcal{Q}/G est fini (on a au plus une paire (H, Y) par élément de R). La longueur de la *plus grande pièce* est exactement

$$\Delta(\mathcal{Q}, X) = \sup \{\text{diam}(Y_1 \cap Y_2) \mid (H_1, Y_1) \neq (H_2, Y_2) \in \mathcal{Q}\}.$$

La longueur de la *plus petite relation* est

$$\text{inj}(\mathcal{Q}, X) = \inf \{\|h\| \mid h \in H, (H, Y) \in \mathcal{Q}\}.$$

La présentation $\langle S \mid R \rangle$ satisfait la condition $C''(\lambda)$ si et seulement si

$$\Delta(\mathcal{Q}, X) < \lambda \text{inj}(\mathcal{Q}, X).$$

Condition de petite simplification dans un espace hyperbolique. On a maintenant tous les éléments pour généraliser la notion de petite simplification. Pour cela on se donne un espace métrique géodésique δ -hyperbolique X . On fixe un groupe G agissant par isométries sur X . Pour le moment on ne fait aucune hypothèse de l'action de G , en particulier G n'est pas nécessairement un groupe hyperbolique. Une *famille de relations* \mathcal{Q} est une collection de paires (H, Y) où

- Y est une partie 10δ -quasi-convexe de X ,

► H est un sous-groupe de G qui préserve Y .

On suppose en outre que \mathcal{Q} est muni d'une action de G définie par $g(H, Y) = (gHg^{-1}, gY)$. On note K le sous-groupe (normal) de G engendré par tous les sous-groupes H , lorsque (H, Y) parcourt \mathcal{Q} . Le but est d'étudier le quotient $\bar{G} = G/K$. Pour cela on transpose la reformulation de la condition $C''(\lambda)$ qu'on a exposé dans le paragraphe précédent. On introduit donc deux quantités qui jouent respectivement le rôle de la longueur de la plus grande pièce et la longueur de la plus petite relation.

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{Q}, X) &= \sup \{ \text{diam}(Y_1^{+20\delta} \cap Y_2^{+20\delta}) \mid (H_1, Y_1) \neq (H_2, Y_2) \in \mathcal{Q} \}, \\ \text{inj}(\mathcal{Q}, X) &= \inf \{ \|h\| \mid h \in H, (H, Y) \in \mathcal{Q} \}. \end{aligned}$$

On rappelle que $Y^{+\alpha}$ désigne le α -voisinage de Y , c'est à dire l'ensemble des point $x \in X$, tels que $d(x, Y) \leq \alpha$.

Définition 6.7. Soit $A \geq 0$ et $\lambda \in (0, 1)$. On dit que la famille \mathcal{Q} vérifie la condition de petite simplification $C''(\lambda, A)$ si

$$\Delta(\mathcal{Q}, X) < \lambda \text{inj}(\mathcal{Q}, X) \quad \text{et} \quad \text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq A\delta.$$

Remarques.

- (i) La définition de $\Delta(\mathcal{Q}, X)$ fait intervenir un « petit » voisinage de Y_1 et Y_2 . Elle coïncide toutefois avec la définition de paragraphe précédent. En effet un arbre est 0-hyperbolique. Très souvent dans un espace δ -hyperbolique on est obligé de travailler à δ -près, ce qui impose ici d'épaissir un peu les quasi-convexes Y_1 et Y_2 (voir par exemple l'exercice 5.10). Moralement on y pense vraiment comme le diamètre de $Y_1 \cap Y_2$.
- (ii) La condition $\text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq A\delta$ est nouvelle. Elle n'apparaît pas dans la condition $C''(\lambda)$. En effet un arbre étant 0-hyperbolique, cette condition est toujours satisfaite dans le cadre classique de la petite simplification.
- (iii) Pour bien comprendre cette définition, il faut garder en tête les ordres de grandeurs des quantités métriques mises en jeu. On va étudier des familles \mathcal{Q} vérifiant la condition $C''(\lambda, A)$ où $A \gg 1$ et $\lambda \ll 1$. La condition de petite simplification dit que le chevauchement entre les Y d'une part et la constante d'hyperbolicité δ d'autre part sont toute petits par rapport à la taille des relations. Dit autrement si on regarde X à l'échelle $\text{inj}(\mathcal{Q}, X)$ toute se passe « presque » comme si les Y ont au plus un point commun et X ressemble fortement à un arbre.

Le théorème de petite simplification. L'énoncé suivant est une généralisation du [Théorème 6.2](#).

Théorème 6.8. Soit G un groupe muni d'une action proprement discontinue et co-compacte sur un espace géodésique δ -hyperbolique X . Il existe des nombres $A > 0$ et $\lambda \in (0, 1)$ avec les propriétés suivantes. Soit \mathcal{Q} une famille de relations telle que \mathcal{Q}/G est fini et pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$, le quotient Y/H est borné. On note \bar{G} le quotient de G par le sous-groupe distingué engendré $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{Q}\}$. Si \mathcal{Q} satisfait la condition $C''(A, \lambda)$, alors \bar{G} est encore hyperbolique.

En fait la théorie de la petite simplification s'applique dans un cadre bien plus large que les seuls groupes hyperboliques. Il suffit en effet de partir d'un groupe G agissant sur un espace hyperbolique. Dans l'énoncé suivante $\text{Stab}(Y)$ désigne le sous-groupe de G qui laisse Y invariant. On notera que si (H, Y) est une paire dans une famille de relation \mathcal{Q} vérifiant $C''(\lambda, A)$ alors H est nécessairement un sous-groupe distingué de $\text{Stab}(Y)$ (exercice).

Théorème 6.9. *Soit $D \geq 0$. Il existe des nombres $A > 0$ et $\lambda \in (0, 1)$ avec les propriétés suivantes. Soit X un espace géodésique δ -hyperbolique muni d'une action par isométries d'un groupe G . Soit \mathcal{Q} une famille de relations satisfaisant la condition $C''(A, \lambda)$. On note K le sous-groupe distingué engendré par $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{Q}\}$ et \bar{G} le quotient G/K . Alors,*

(i) *il existe un sous-ensemble \mathcal{Q}_0 de \mathcal{Q} tel que K est isomorphe au produit libre*

$$K \equiv \underset{(H, Y) \in \mathcal{Q}_0}{*} H,$$

(ii) *pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$, la projection canonique $G \rightarrow \bar{G}$ induit un plongement de $\text{Stab}(Y)/H$ dans \bar{G} ,*

(iii) *pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, si $\|g\| \leq D\delta$ alors l'image de g dans \bar{G} est non triviale,*

(iv) *Le groupe \bar{G} agit sur un espace métrique $\bar{\delta}$ -hyperbolique « approprié » \bar{X} .*

Remarques. Lorsque $\delta > 0$, le point (iii) assure que le groupe quotient \bar{G} n'est pas trivial. En particulier, si $D \gg 1$, tous les éléments de $K \setminus \{1\}$ sont nécessairement hyperboliques (exercice). Une autre manière d'y penser est de dire que si les relations imposées par \mathcal{Q} sont très grande, alors la projection $G \rightarrow \bar{G}$ préserve la structure à petite échelle – c'est à dire petite devant $\text{inj}(\mathcal{Q}, X)$ de G .

Tel qu'il est formulé, le point (iv) n'est pas très pertinent : n'importe quel groupe agit trivialement sur un point... qui est un espace hyperbolique! Cependant l'espace \bar{X} a des propriétés métriques remarquables qui facilitent l'étude de \bar{G} . C'est cette compréhension de l'action de \bar{G} sur \bar{X} qui permet de prouver que si \mathcal{Q}/G est fini et si l'action de G sur X est proprement discontinue et co-compacte, alors il en est de même de l'action de \bar{G} sur \bar{X} .

Des exemples de famille de relations. Encore une fois on notera qu'il n'y a aucune hypothèse sur l'action de G . Toutes les hypothèses sont contenues dans la condition $C''(\lambda, A)$. On va donner ici des exemples de famille de relations vérifiant cette condition. Soit R une partie finie de G . On va y associer une famille de relation \mathcal{Q}_R . En première approximation on aimerait prendre l'ensemble des paires formées des conjugués de R et de leur ensemble caractéristique. Toutefois l'ensemble caractéristique a un petit défaut d'invariance (voir la proposition suivante). Il faut d'abord épaissir un peu cet ensemble.

Soit g un élément loxodromique de G . On rappelle (voir [Exercice 5.24](#)) que $E(g)$ est le sous-groupe de G formé de tous les éléments $u \in G$ tels que la distance de Hausdorff entre C_g et uC_g est finie.

Proposition 6.10. *Soit $g \in G$ un élément loxodromique. Il existe une partie 10δ -quasi-convexe Y_g invariante sous l'action de $E(g)$, contenant C_g et telle que la distance de Hausdorff entre C_g et Y_g est finie.*

Démonstration. On note Z_g l'union des ensembles uC_g lorsque u parcourt $E(g)$. Cette ensemble est par construction $E(g)$ invariant et contient C_g . On va maintenant montrer qu'il est quasi-convexe, et reste à distance bornée de C_g . Soit $x \in C_g$. On se donne une géodésique $\gamma: [0, T] \rightarrow X$ entre x et gx . On étend γ en un chemin bi-infini $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$ en posant $\gamma(t + nT) = g^n \gamma(t)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $t \in [0, T[$. Ce chemin est contenu dans C_g (voir la preuve de la [Proposition 5.12](#)). On a vu lors de la preuve du [Corollaire 5.17](#) que γ est une (κ, ℓ) -quasi-géodésique ou $\kappa \geq 1$ et $\ell \geq 0$ sont des paramètres qui ne dépendent que de g (et non du point x). On note maintenant $D = D(\kappa, \ell, \delta)$ la constante donnée par la stabilité des quasi-géodésiques ([Théorème 4.7](#)). Soit $u \in G$. Le point ux se trouve sur le chemin $u\gamma$ qui est encore une (κ, ℓ) -quasi-géodésique. Par ailleurs puisque u appartient à $E(g)$, la distance de Hausdorff entre γ et $u\gamma$ est finie. On montre alors comme dans le [Corollaire 5.17](#) que $u\gamma$ reste dans le R -voisinage de γ où $R = 2D + 8\delta$. Il en découle que la distance de Hausdorff entre Z_g et C_g est majorée par R .

Montrons maintenant que Z_g est quasi-convexe. Soit $x, x' \in Z_g$. D'après l'étude précédente x (respectivement x') est à distance au plus R d'un point y (respectivement y') de C_g . Puisque les triangles de X sont 4δ -étroit, la géodésique $[x, x']$ reste à distance au plus 8δ du chemin $[x, y] \cup [y, y'] \cup [y', x']$. On note que les côtes $[x, y]$ et $[x', y']$ sont de longueur au plus R . Par ailleurs C_g étant 16δ -quasi-convexe, $[y, y']$ est dans le 16δ -voisinage de C_g . Par conséquent $[x, x']$ est dans le $2R + 24\delta$ -voisinage de C_g et donc de Z_g . Ainsi Z_g est α -quasi-convexe ou $\alpha = 2R + 24\delta$.

Pour conclure on note Y_g le α -voisinage de Z_g . C'est une partie 8δ -quasi-convexe de X ([Exercice 5.9](#)) contenant C_g . La distance de Hausdorff entre Y_g et C_g est majorée par $R + \alpha$. Puisque Z_g est invariant sous l'action de $E(g)$ il en est de même de Y_g . \square

Étant donnée une famille d'éléments loxodromique R de G , on définit

$$\mathcal{Q}_R = \{(\langle uru^{-1} \rangle, uY_r) \mid r \in R, u \in G\}$$

On observe alors que le sous-groupe normal K engendré par tout les sous-groupes H où (H, Y) parcourt \mathcal{Q} est exactement $\langle\langle R \rangle\rangle$. Donc $\bar{G} = G/K = G/\langle\langle R \rangle\rangle$. Autrement dit le groupe \bar{G} est obtenu en rajoutant tous les éléments de R aux relations de G . On dira que l'ensemble R satisfait la condition de petite simplification $C''(\lambda, A)$ si \mathcal{Q}_R satisfait $C''(\lambda, A)$.

Dans cette exemple, pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}_R$, le sous-groupe H est *cyclique*. En fait la théorie fonctionne pour des formes plus générales de sous-groupes, du moment qu'ils préservent un quasi-convexe.

On dit que l'action de G sur X est *propre* (au sens métrique) si pour tout $x \in X$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble

$$\{g \in G \mid d(gx, x) \leq r\}$$

est fini. Si l'espace X est propre (ce qu'on a pas supposé ici) et l'action de G sur X est proprement discontinue alors elle est propre au sens métrique (exercice).

Proposition 6.11. *On suppose que l'action de G sur X est propre (au sens métrique). Soit $g \in G$ un élément loxodromique. Pour tout $A \geq 1$ et $\lambda \in (0, 1)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $R = \{g^{kn}\}$ vérifie la condition $C''(\lambda, A)$.*

Démonstration. On va montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $u \in G \setminus E(g)$ si

$$\text{diam}(Y_g^{+20\delta} \cap uY_g^{+20\delta}) \geq C,$$

alors u commute avec une puissance de g . Pour cela on fixe un point $x \in C_g$ et une géodésique $\gamma: [0, T] \rightarrow X$ entre x et gx . On étend γ en un chemin bi-infini $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$ en posant : $\gamma(t + nT) = g^n \gamma(t)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $t \in [0, T]$. Pour simplifier les notations on posera $x = \gamma(0)$. On commence par introduire « quelques » paramètres qui vont nous permettre de définir C . Puisque g est loxodromique, il existe $\kappa \geq 1$ et $\ell \geq 0$ tel que γ est une (κ, ℓ) -quasi-géodésique.

- D'après la stabilité des quasi-géodésique ([Théorème 4.7](#)) il existe $D_1 = D_1(\kappa, \ell, \delta)$ tel que la distance de Hausdorff entre deux (κ, ℓ) -quasi-géodésique ayant les mêmes extrémités est au plus D_1 .
- On a vu lors de la preuve de la [Proposition 5.12](#) que γ est entièrement contenu dans C_g . Inversement, le [Corollaire 5.17](#) combiné à la , assure qu'il existe D_2 tel que tout point de C_g est à distance D_2 d'un point de γ .
- Posons

$$r = 4 \|g\| + 4D_1 + 6D_2 + 176\delta. \quad (17)$$

Puisque l'action de G sur X est propre, l'ensemble $S(x) = \{g \in G \mid d(gx, x) \leq r\}$ est fini. On note N son cardinal.

On pose maintenant

$$C > \kappa NT + 2D_2 + 40\delta + \ell$$

Soit $u \in G$. Supposons que

$$\text{diam}(Y_g^{+20\delta} \cap uY_g^{+20\delta}) \geq C,$$

D'après notre choix de D_2 , les ensembles Y_g et uY_g sont contenus dans le D_1 voisinage de γ et $u\gamma$ respectivement. Par conséquent

$$\text{diam}(\gamma^{+D_2+20\delta} \cap u\gamma^{+D_2+20\delta}) \geq C,$$

Autrement dit il existe $s, s', t, t' \in \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} d(\gamma(s), u\gamma(t)) &\leq 2D_2 + 40\delta & \text{et} & & d(\gamma(s'), u\gamma(t')) &\leq 2D_2 + 40\delta, \\ d(\gamma(s), \gamma(s')) &\geq C - 2D_2 - 40\delta & \text{et} & & d(u\gamma(t), u\gamma(t')) &\geq C - 2D_2 - 40\delta. \end{aligned}$$

Faire un dessin ! Puisque γ et donc $u\gamma$ sont des (κ, ℓ) -quasi-géodésiques on en déduit que

$$|t' - t| \geq \kappa^{-1}C - \kappa^{-1}(2D_2 + 40\delta + \ell) \quad \text{et} \quad |s' - s| \geq \kappa^{-1}C - \kappa^{-1}(2D_2 + 40\delta + \ell)$$

En particulier $|t' - t|$ et $|s' - s|$ sont minorés par NT . Sans perte de généralité, on peut supposer que $s \leq s'$. En revanche il se peut que $t \geq t'$. En effet u peut « renverser l'orientation » de γ . Pour gérer ce problème on pose $\varepsilon = 1$ si $t' \geq t$ et $\varepsilon = -1$ sinon. On affirme maintenant que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ on a

$$d(g^n \gamma(s), ug^{\varepsilon n} u^{-1} \gamma(s)) \leq 2 \|g\| + 4D_1 + 8D_2 + 196\delta. \quad (18)$$

Ce qui signifie que $ug^{\varepsilon n} u^{-1}$ déplace $\gamma(s)$ approximativement de la même manière que g^n . On se rappelle que $d(\gamma(s), u\gamma(t)) \leq 2D_2 + 40\delta$. En vertu de l'inégalité triangulaire, il suffit donc de montrer que

$$d(g^n \gamma(s), [ug^{\varepsilon n} u^{-1}] u\gamma(t)) \leq 2 \|g\| + 4D_1 + 6D_2 + 156\delta$$

Par construction de γ , on a

$$[ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t) = u\gamma(t + \varepsilon nT).$$

Puisque $|t' - t| \geq nT$, ce point est situé sur $u\gamma$ entre $u\gamma(t)$ et $u\gamma(t')$. Il découle de la stabilité des quasi-géodésiques $[ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t)$ est situé à distance au plus D_1 de la géodésique $[u\gamma(t), u\gamma(t')]$. Puisque les triangles de X sont 4δ -étroit, cette dernière reste dans le 8δ -voisinage de $[u\gamma(t), \gamma(s)] \cup [\gamma(s), \gamma(s')] \cup [\gamma(s'), u\gamma(t')]$. Toutefois les côtés $[u\gamma(t), \gamma(s)]$ et $[u\gamma(t'), \gamma(s')]$ sont de longueur au plus $2D_2 + 40\delta$. En combinant toutes ces observations, il vient que $[ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t)$ est à distance au plus $2D_2 + D_1 + 48\delta$ de $[\gamma(s), \gamma(s')]$. De façon similaire, la stabilité des quasi-géodésiques assure que $g^n\gamma(s)$ est à distance au plus D_1 de $[\gamma(s), \gamma(s')]$. Pour terminer on notera que

$$\begin{aligned} & |d(\gamma(s), g^n\gamma(s)) - d(\gamma(s), [ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t))| \\ & \leq |d(\gamma(s), g^n\gamma(s)) - d(u\gamma(t), [ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t))| + d(\gamma(s), u\gamma(t)) \\ & \leq |d(\gamma(s), \gamma(s + nT)) - d(u\gamma(t), u\gamma(t + nT))| + 2D_2 + 40\delta. \end{aligned}$$

Puisque γ est une (κ, ℓ) -quasi-géodésique g -invariante $d(\gamma(s), \gamma(s + nT))$ et $d(\gamma(t), \gamma(t + nT))$ diffèrent d'au plus $2\|g\| + 20\delta$. Ainsi

$$|d(\gamma(s), g^n\gamma(s)) - d(\gamma(s), [ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t))| \leq 2\|g\| + 2D_2 + 60\delta.$$

Pour résumer on a montré que $g^n\gamma(s)$ et $[ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t)$ sont deux points proches de $[\gamma(s), \gamma(s')]$. En outre ils sont à peu près à la même distance de $\gamma(s)$. Il découle de l'inégalité triangulaire que $g^n\gamma(s)$ et $[ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t)$ sont proches. Plus précisément

$$d(g^n\gamma(s), [ug^{\varepsilon n}u^{-1}]u\gamma(t)) \leq 2\|g\| + 4D_1 + 6D_2 + 156\delta,$$

Ce qui correspond au résultat annoncé.

On va montrer maintenant que l'ensemble

$$A = \{a \in G \mid d(a\gamma(s), \gamma(s)) \leq 2\|g\| + 4D_1 + 6D_2 + 156\delta\}$$

contient au plus N éléments. Pour cela il suffit de toute « ramener » cette observation en x . Une division euclidienne permet d'écrire $s = s_0 + mT$ où $s_0 \in [0, T]$ et $m \in \mathbb{Z}$. Soit $a \in A$. Puisque γ est invariant sous l'action de g on a

$$\begin{aligned} d(g^{-m}ag^m x, x) &= d(ag^m x, g^m x) \leq d(ag^m \gamma(s_0), g^m \gamma(s_0)) + 2\|g\| + 20\delta \\ &\leq d(a\gamma(s_0 + mT), \gamma(s_0 + mT)) + 2\|g\| + 20\delta \\ &\leq d(a\gamma(s), \gamma(s)) + 2\|g\| + 20\delta. \end{aligned}$$

Ainsi $g^{-m}Ag^m$ est contenu dans $S(x)$. Le cardinal de A est donc majoré par N comme annoncé. La précédente observation entraîne que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, l'élément $g^{-n}ug^{\varepsilon n}u^{-1}$ appartient à N . Par conséquent, deux de ces éléments doivent être égaux. Il en découle qu'il existe $q \in \llbracket 0, N \rrbracket$, tel que $ug^{\varepsilon q}u^{-1} = g^q$. Ainsi u appartient à $E(g)$ ([Exercice 5.24](#)).

Il nous reste maintenant à fixer l'entier k . L'idée est la suivante : puisque que g est loxodromique, on peut prendre $k \in \mathbb{N}$, tel que $\|g^k\|$ soit arbitrairement grand. En particulier cette longueur sera plus grand que $A\delta$ et $\lambda^{-1}C$. Plus précisément on fixe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k_0 \|g\|_{\infty} > \max \{A\delta, \lambda^{-1}C\},$$

et on pose $k = N!k_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On affirme que la famille

$$\mathcal{Q} = \{(\langle ug^{kn}u^{-1} \rangle, uY_g) \mid u \in G\}$$

satisfait la condition $C''(\lambda, A)$. On vérifie d'abord que $\text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq A\delta$. C'est une conséquence directe de notre choix de k_0 . Montrons maintenant que $\Delta(\mathcal{Q}, X) < \text{inj}(\mathcal{Q}, X)$. Pour cela prenons deux paires $(H_1, Y_1), (H_2, Y_2)$ dans \mathcal{Q} telles que

$$\text{diam}(Y_1^{+20\delta} \cap Y_2^{+20\delta}) > \lambda \text{inj}(\mathcal{Q}, X)$$

Quitte à conjuguer simultanément (H_1, Y_1) et (H_2, Y_2) on peut supposer que

$$(H_1, Y_1) = (\langle g^{kn} \rangle, Y_g) \quad \text{et} \quad (H_2, Y_2) = (\langle ug^{kn}u^{-1} \rangle, uY_g)$$

pour un certain $u \in G$. Il découle de notre choix de k_0 que

$$\text{diam}(Y_g^{+20\delta} \cap uY_g^{+20\delta}) > \lambda \text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq C$$

D'après notre étude précédente, u est un élément de $E(g)$. En particulier $uY_g = Y_g$. On a en fait montré mieux. Il existe $q \in \llbracket 0, N \rrbracket$, tel que $ug^{\varepsilon q}u^{-1} = g^q$. Comme k est un multiple de q , u et g^{kn} commute (si $\varepsilon = 1$) ou « anticommute » (si $\varepsilon = -1$). Dans tous les cas u normalise $\langle g^{kn} \rangle$. Donc $\langle ug^{kn}u^{-1} \rangle = \langle g^{kn} \rangle$. On a donc montré que pour tout $(H_1, Y_1), (H_2, Y_2) \in \mathcal{Q}$, si

$$\text{diam}(Y_1^{+20\delta} \cap Y_2^{+20\delta}) > \lambda \text{inj}(\mathcal{Q}, X)$$

Alors $(H_1, Y_1) = (H_2, Y_2)$. Ce qu'il fallait démontrer. \square

Ce résultat peut se généraliser de la manière suivante.

Exercice 6.12. On suppose que l'action de G sur X est propre (au sens métrique). Soit g_1, g_2, \dots, g_m une collection finie d'éléments loxodromiques de G . Pour tout $A \geq 1$ et $\lambda \in (0, 1)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$R = \{g_1^{kn}, g_2^{kn}, \dots, g_m^{kn}\}$$

vérifie la condition $C''(\lambda, A)$.

On a des exemples de familles de relations vérifiant la condition $C''(\lambda, A)$, même lorsque l'action de G sur X n'est pas propre.

Exercice 6.13. Soient A et B deux groupes. On considère le produit libre $G = A * B$ agissant sur l'arbre de Bass-Serre X . Soit g_1, g_2, \dots, g_m une collection finie d'éléments loxodromiques de G . Pour tout $A \geq 1$ et $\lambda \in (0, 1)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, l'ensemble

$$R = \{g_1^n, g_2^n, \dots, g_m^n\}$$

vérifie la condition $C''(\lambda, A)$.

Exercice 6.14. Soient A et B deux groupes et $G = A * B$ leur produit libre. On note X l'arbre de Bass-Serre sur lequel G agit par isométries. Soient $g, h \in G$ deux éléments loxodromiques dont les axes C_g et C_h sont disjoints.

- (i) Étant donné deux entiers n et p , « dessiner » l'axe de gh^n , puis de $gh^n gh^{n+1} gh^{n+2} \dots gh^{n+p}$.
- (ii) Soient $A > 0$ et $\lambda \in (0, 1)$. Montrer que si n et p sont suffisamment grand les relations

$$\begin{aligned} r_0 &= gh^n gh^{n+1} gh^{n+2} \dots gh^{n+p-1} \\ r_1 &= gh^{n+p} gh^{n+p+1} gh^{n+p+2} \dots gh^{n+2p-1} \\ &\dots \\ r_{m-1} &= gh^{n+(m-1)p} gh^{n+(m-1)p+1} gh^{n+(m-1)p+2} \dots gh^{n+mp-1} \end{aligned}$$

vérifient la condition $C''(\lambda, A)$.

- (iii) Transposer cette étude pour deux éléments loxodromique g et h dans un groupe hyperbolique G dont les axes sont suffisamment éloignés.

L'exercice précédent montre que la petite simplification dans des espaces hyperboliques se comporte de manière très semblable au cas usuel : dès qu'on choisi comme relation des mots « suffisamment compliqués » il y a de grandes chances qu'on produise des relations vérifiant la condition $C''(\lambda, A)$.

6.5 Groupes de torsion et autres créatures exotiques

Petit historique. On va maintenant étudier une application de la théorie de la petite simplification dans des groupes hyperboliques. Si Q est un groupe fini alors Q est de type fini et tous ses éléments sont d'ordre fini. Au début du XX^{ième} siècle, W. Burnside a demandé si la réciproque est vrai : si Q est un groupe de type fini dont tous les éléments sont d'ordre fini, est-ce que Q est nécessairement fini. On appellera *groupe de torsion* un groupe dont tous les éléments sont d'ordre fini. W. Burnside s'est penché sur quelques cas particuliers.

Proposition 6.15. *Soit G un groupe de type fini, tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Alors G est fini.*

Exercice 6.16. Démontrer la Proposition 6.15. On pourra montrer que le groupe G est abélien. Que se passe-t-il si on suppose que $g^3 = 1$, pour tout $g \in G$? (plus difficile)

Exercice 6.17. Montrer qu'il existe des groupes de torsion infini qui ne sont pas de type fini.

Proposition 6.18 (Burnside, Schur). *Soit n un entier Soit G un sous-groupe de type fini de $GL(n, \mathbb{C})$ dont tous les éléments sont d'ordre fini. Alors G est fini.*

Exercice 6.19. Soit G un groupe hyperbolique. Montrer que si H est un sous-groupe de torsion de G alors H est fini.

Dans la même inspiration, le lemme de Serre (Proposition 3.18) nous dit que si G est un groupe de torsion de type fini agissant par isométrie sur un arbre alors G a un point fixe global. Les exemples précédent montre qu'il est a priori difficile de construire un groupe infini, de type fini, dont tous les éléments sont d'ordre fini.

Les premiers exemples de groupes de torsion infinis de type fini on été construits au début des années 60 par Golod et Safarevich en utilisant des méthodes d'algèbres homologique. L'objectif est d'apporter une approche alternative à la question de Burnside. Plus précisément on va montrer le résultat suivant.

Théorème 6.20. *Soit G un groupe hyperbolique qui n'est pas virtuellement cyclique. Il existe un quotient infini Q de G dont tous les éléments sont d'ordre fini.*

Exercice 6.21. Montrer que si G est virtuellement cyclique le [Théorème 6.20](#) est faux.

En fait on a le théorème bien plus fort suivant. La démonstration repose aussi sur des arguments de petite simplification, mais sort largement du cadre de ce cours. Étant donné un groupe G et un entier n on notera G^n le sous-groupe (distingué) de G engendré par $\{g^n \mid g \in G\}$.

Théorème 6.22 (Ivanov-Ol'shanskii). *Soit G un groupe hyperbolique qui n'est pas virtuellement cyclique. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient G/G^{kn} est infini.*

Exercice 6.23. Montrer qu'il existe un groupe hyperbolique G , qui n'est pas virtuellement cyclique, tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq n_0$ tel que G/G^n est trivial. On pourra considérer le groupe $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Construction. L'idée de la construction est d'utiliser la théorie la petite simplification (!) pour construire des groupes ayant de plus en plus d'éléments d'ordre fini. On dit qu'un groupe G est *élémentaire* s'il est virtuellement cyclique. Un tel groupe est soit fini soit quasi-isométrique à \mathbb{Z} . Il est donc évidemment hyperbolique. À l'inverse si G est un groupe hyperbolique qui n'est pas élémentaire alors G contient un sous-groupe isomorphe au groupe libre \mathbf{F}_2 (cf. devoir maison 2). On va réaliser une preuve par récurrence dont l'énoncé suivant va jouer le rôle de l'étape d'induction.

Proposition 6.24. *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire. Soit g un élément loxodromique de G . Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le quotient $\bar{G} = G/\langle\langle g^n \rangle\rangle$ est un groupe hyperbolique non élémentaire.*

Soit G un groupe hyperbolique et g un élément loxodromique de G . En combinant la [Proposition 6.11](#) et le [Théorème 6.8](#) on sait que pour des entiers n suffisamment grand, le quotient $\bar{G} = G/\langle\langle g^n \rangle\rangle$ est un groupe hyperbolique. Dit de manière approximative la classe des groupes hyperboliques est « stable par petite simplification ». La proposition précédente nous donne une information supplémentaire qui va s'avérer cruciale. En effet tout groupe fini (ou même trivial) est hyperbolique. Le théorème [Théorème 6.8](#) n'assure pas a priori que le quotient \bar{G} est non trivial. On pourra vérifier par exemple que la présentation

$$\langle a, b \mid a, b \rangle$$

vérifie la condition de petite simplification $C''(\lambda)$ pour tout $\lambda \in (0, 1)$. La [Proposition 6.24](#) nous dit que si G n'est pas hyperbolique pour une raison évidente (il est fini ou quasi-isométrique à \mathbb{Z}) alors il en est de même du quotient \bar{G} . En particulier le quotient \bar{G} contient un sous-groupe isomorphe au groupe libre \mathbf{F}_2 .

Preuve du [Théorème 6.20](#). On fixe une fois pour toute un groupe hyperbolique non-élémentaire G . En tant que groupe de type fini, G est dénombrable. On peut donc énumérer tous ses éléments g_0, g_1, g_2, \dots . Sans perte de généralité on peut toujours supposer que $g_0 = 1$. On va maintenant construire par récurrence une suite de groupes hyperboliques non-élémentaires

$$G = G_0 \twoheadrightarrow G_1 \twoheadrightarrow G_2 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow G_k \twoheadrightarrow G_{k+1} \twoheadrightarrow \dots,$$

de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, l'image de g_j dans G_k est d'ordre fini. Autrement dit dans G_k , les $k+1$ premiers éléments de notre liste sont devenus d'ordre fini.

On initialise la récurrence en posant $G_0 = G$. Vu qu'on a choisi $g_0 = 1$, l'hypothèse est clairement vérifiée. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que le groupe G_k a été construit. On distingue alors deux cas.

Cas 1. *l'image de g_{k+1} dans G_k est d'ordre fini.* On pose alors $G_{k+1} = G_k$ et il n'y a rien à démontrer.

Cas 2. *l'image de g_{k+1} dans G_k est d'ordre infini.* On note h l'image de g_k dans G_k . En particulier h est un élément loxodromique de G_k . D'après la [Proposition 6.24](#), il existe un entier n_{k+1} tel que le groupe $G_{k+1} = G_k / \langle\langle g_{k+1}^{n_{k+1}} \rangle\rangle$ est hyperbolique et non élémentaire. Par construction l'image de h dans G_{k+1} est d'ordre fini. Aussi l'image de g_{k+1} and G_{k+1} aussi. D'après notre hypothèse de récurrence pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, l'image de g_j dans G_k est d'ordre fini. Son image dans G_{k+1} est donc a fortiori d'ordre fini, ce qui termine l'étape de récurrence.

L'étape suivante consiste à prendre la limite des groupes G_k . Formellement on est en train de considérer une limite inductive dans la catégorie des groupes... mais on va se contenter d'une construction « à la main » bien plus explicite. Dans la construction précédente chaque groupe G_{k+1} est un quotient du groupe précédent G_k . On a donc une projection $\pi_k: G \rightarrow G_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ qui vérifie la propriété suivante : si $N_k \subset G$ désigne le noyau de π_k alors la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion. On pose alors

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k.$$

C'est un sous-groupe distingué de G (exercice). On va étudier le quotient $Q = G/N$.

Fait 1. *Le groupe Q est un groupe de torsion.* Soit q un élément de Q . Vu qu'on a listé tous les éléments de G , il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que q est l'image de $g_k \in G$. Or l'image de g_k dans G_k est d'ordre fini. Autrement dit il existe $m_k \in \mathbb{N}$, tel que $g_k^{m_k}$ appartient à N_k et donc à N . Par conséquent $q^{m_k} = 1$. Ainsi tous les éléments de Q sont d'ordre fini.

Fait 2. *Le groupe Q n'est pas de présentation finie.* Jusqu'ici on n'a absolument utilisé le fait que les groupes G_k était hyperboliques non élémentaires. Cette propriété joue un rôle crucial ici. On se donne une partie génératrice de S de G de sorte que l'image de S dans Q est aussi une partie génératrice de Q . Supposons que contrairement à notre affirmation Q est de présentation finie. Puisque G est hyperbolique, il est de présentation finie. Aussi il existe une partie finie $R \subset G$ tel que la projection $G \rightarrow G$ induit un isomorphisme entre $G/\langle\langle R \rangle\rangle$ et Q (exercice). En particulier $N = \langle\langle R \rangle\rangle$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ le noyau N_k de $\pi_k: G \rightarrow G_k$ est contenu dans $\langle\langle R \rangle\rangle$. On se rappelle que (N_k) est une suite croissante de sous-groupe distingués de G dont l'union est N . Puisque R est fini, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que R et donc $\langle\langle R \rangle\rangle$ est contenu dans N_k . Il en découle que $\langle\langle R \rangle\rangle = N_k$. Par conséquent Q n'est autre que le quotient $G_k = G/N_k$. Comme G_k est un groupe hyperbolique non élémentaire, il contient des éléments d'ordre infini, ce qui contredit le fait précédent.

Fait 3. *Le groupe Q est infini.* Il suffit d'observer que tout groupe fini F est de présentation finie. On peut en effet prendre pour présentation $\langle S \mid R \rangle$ ou $S = F$ et R représente toute la table de groupe de F . \square

Remarque. Le groupe Q est une limite de groupes hyperboliques G_k . Toutefois il n'est pas lui même un groupe hyperbolique ([Exercice 6.19](#)). En fait la constante d'hyperbolicité δ_k du groupe G_k diverge lorsque k tends vers l'infini.

Un peu de téralogie des groupes. La stratégie exposée ci-dessus a été utilisée à de mainte reprise pour produire des groupes avec des propriétés exotiques. On pourra citer les exemples suivants.

Proposition 6.25 (Monstre de Tarski. Ol'shanskii). *Il existe un groupe Q de type fini, non abélien, dont tous les sous-groupes propres sont isomorphes à \mathbb{Z} .*

Esquisse de preuve. Partons du groupe libre \mathbf{F}_2 engendré par deux éléments a et b . On liste toutes les paires d'éléments de \mathbf{F}_2 : $(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots$. Sans perte de généralité on peut supposer que $(u_0, v_0) = 1$. On construit alors par récurrence une suite de groupes hyperboliques non élémentaires sans torsion

$$\mathbf{F}_2 = G_0 \twoheadrightarrow G_1 \twoheadrightarrow G_2 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow G_k \twoheadrightarrow G_{k+1} \twoheadrightarrow \dots,$$

de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ l'image de (u_j, v_j) dans G_k engendre soit le groupe G_k en entier, soit un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} . On initialise la construction en posant $G_0 = \mathbf{F}_2$. Supposons maintenant que le groupe G_k ait été construit. Si l'image de (u_{k+1}, v_{k+1}) dans G_k engendrent un groupe isomorphe à \mathbb{Z} , alors on pose simplement $G_{k+1} = G_k$ et il n'y a rien à vérifier. Sinon on observe que le sous-groupe de G_k engendré par u_{k+1} et v_{k+1} est non élémentaire. En particulier il contient un sous-groupe libre. Cela fournit une grande marge de manœuvre pour exhiber des relations à petite simplification. Ici, on définit un quotient G_{k+1} de G_k en ajoutant deux relations de la forme

$$\begin{aligned} a &= \text{un mot très compliqué en } u_{k+1} \text{ et } v_{k+1} \\ b &= \text{un autre mot très compliqué en } u_{k+1} \text{ et } v_{k+1} \end{aligned}$$

On se rappelle que a et b sont les générateurs de \mathbf{F}_2 . Ainsi les images de u_{k+1} et v_{k+1} dans G_{k+1} engendrent ce dernier. La théorie de la petite simplification permet de justifier que le groupe G_{k+1} ainsi obtenu est hyperbolique et non-élémentaire.

On définit alors le groupe Q comme la limite direct des groupes G_k . Prenons maintenant H un sous-groupe propre de Q . Si h_1 et h_2 sont deux éléments de H , il ne peuvent engendrer le groupe Q entier. Il découle de notre construction que h_1 et h_2 commutent. En particulier H est abélien. Une étude plus approfondie sur la structure de groupes élémentaires de G_k permet de montrer que H est en fait isomorphe à \mathbb{Z} . \square

Proposition 6.26 (Osin). *Il existe un groupe de type fini, infini, qui a exactement deux classes de conjugaisons : la classe de l'élément trivial et une autre.*

Exercice 6.27. Montrer que dans le groupe G construit par D. Osin tous les éléments sont d'ordre infini. On pourra montrer les faits suivant.

- (i) Si un élément est d'ordre fini, alors tous les éléments sont d'ordre fini (avec le même ordre).
- (ii) Dans ce cas g ne peut pas être conjugué à g^2 à moins que G soit isomorphe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (utiliser le petit théorème de Fermat).

7 Démonstration des théorèmes de petite simplification

7.1 Stratégie générale

Jusqu'ici on a utilisé les théorèmes de petite simplification (Théorèmes 6.2, 6.8, 6.9 et Proposition 6.24) comme des boîtes noires. Le but de cette partie est d'esquisser la preuve de ces résultats en suivant l'approche géométrique proposée par M. Gromov.

Dans un premier temps nous allons expliquer dans le cas de la petite simplification usuelle les grandes étapes de la démonstration. Considérons donc un group $\bar{G} = \langle S \mid R \rangle$ donné par une présentation à petite simplification $C''(\lambda)$. On supposera que $\lambda \ll 1$. Pour simplifier on supposera en outre que toutes les relations sont de longueur $L \gg 1$. On notera X le graphe de Cayley du groupe libre $\mathbf{F}(S)$. Le graphe de Cayley de \bar{G} , n'est autre que l'espace quotient $X/\langle\langle R \rangle\rangle$. Chaque relation $r \in R$ définit une boucle de longueur L dans $X/\langle\langle R \rangle\rangle$. Cette boucle n'est autre que l'image dans $X/\langle\langle R \rangle\rangle$ de l'axe de r . On construit alors un espace \bar{X} en recollant sur chacune de ses boucles (et leurs translatés) un disque topologique D . D'après le théorème de van Kampen l'espace \bar{X} est simplement connexe. On l'appelle parfois *complexe de Cayley* de \bar{G} . Pour le moment \bar{X} est un espace topologique.

L'étape suivant consiste à le munir d'une métrique. Pour ce faire on identifie chaque disque qu'on a recollé avec un disque de rayon ρ du plan hyperbolique \mathbb{H}_2 de sorte que le périmètre du disque est $L = 2\pi \operatorname{sh} \rho$. Puisqu'on a choisi $L \gg 1$, le rayon ρ est très grand devant la constante d'hyperbolicité δ de \mathbb{H}_2 . Il en découle que l'espace \bar{X} est localement hyperbolique. Plus précisément toutes les boules de rayon $\rho/100$ sont environ 2δ -hyperbolique. En effet si une telle boule est entièrement contenue dans l'un des disque que l'on a attachés, elle est δ -hyperbolique. Si au contraire elle est centrée sur un point du graphe de Cayley $X/\langle\langle R \rangle\rangle$, elle est grosso modo la réunion d'une famille de morceaux de disques hyperboliques qui ne se chevauchent que très peu (faire un dessin). Il est facile que se convaincre que si on attache deux espaces δ -hyperboliques en un point, le résultat est encore δ -hyperbolique. Une petite perturbation de ce résultat entraîne que les boules considérées précédemment sont 2δ -hyperbolique.

On est alors en mesure d'utiliser un résultat de passage local-global pour propager l'hyperbolicité à tous l'espace \bar{X} . On se rappelle que dans un espace hyperbolique les quasi-géodésiques locales sont des quasi-géodésiques globales. Le résultat suivant s'inscrit dans la même logique.

Théorème 7.1 (Cartan-Hadamard). *Soit $\sigma, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sigma > 10^{10}\delta$. Soit X un espace géodésique simplement connexe. Si toutes les boules de rayon σ dans X sont δ -hyperbolique, alors X est (globalement) 300δ -hyperbolique.*

En appliquant ce résultat à \bar{X} , on observe que ce dernier est un espace métrique hyperbolique. Par construction \bar{G} agit de façon proprement discontinue et co-compact sur \bar{X} , aussi \bar{G} est un groupe hyperbolique.

En pratique la démonstration varie un peu de la stratégie exposé ci-dessus. Plutôt que quotienter X puis y rattacher des disques, on préfère recoller des cônes sur X pour obtenir un espace \check{X} appelé *espace cône* (ou *cone-off* en anglais), puis passer au quotient. Cela simplifie en effet la description locale de l'espace \bar{X} .

Exercice 7.2. Montrer que le théorème de Cartan-Hadamard est faux si on ne suppose pas l'espace simplement connexe.

7.2 Cône sur un espace métrique.

Soit Y un espace métrique.

Définition 7.3. Le cône de base Y et de rayon ρ est le quotient de $Y \times [0, \rho]$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de la forme $(y, 0)$. On le note $C_\rho(Y)$ ou simplement $C(Y)$. Le sommet du cône, noté c , est la classe de $(y, 0)$.

L'application $\iota: Y \rightarrow C(Y)$ qui envoie le point y sur (y, ρ) permet d'identifier Y avec la base du cône $C(Y)$.

Proposition 7.4 ([2, Chapter I.5, Proposition 5.9]). *Le cône $C(Y)$ peut être muni d'une métrique caractérisée par la relation suivante. Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points de $C(Y)$, alors*

$$\operatorname{ch} d(x, x') = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r' \cos(\theta(y, y')),$$

où $\theta(y, y')$ représente l'angle au sommet $\theta(y, y') = \min\{\pi, d(y, y')/\operatorname{sh} \rho\}$.

Cette métrique s'interprète de la manière suivante. Étant donné $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points de $C(Y)$ on construit un triangle $[\tilde{c}, \tilde{x}, \tilde{x}']$ dans le plan hyperbolique \mathbb{H}_2 dont la longueur des côtés $[\tilde{c}, \tilde{x}]$ et $[\tilde{c}, \tilde{x}']$ est respectivement r et r' et tel que l'angle en \tilde{c} soit $\theta(\tilde{c})(\tilde{x}, \tilde{x}') = \theta(y, y')$. La loi des cosinus assure que la distance entre x et x' dans $C(Y)$ est exactement la longueur du troisième côté de ce triangle (cf. Figure 1).

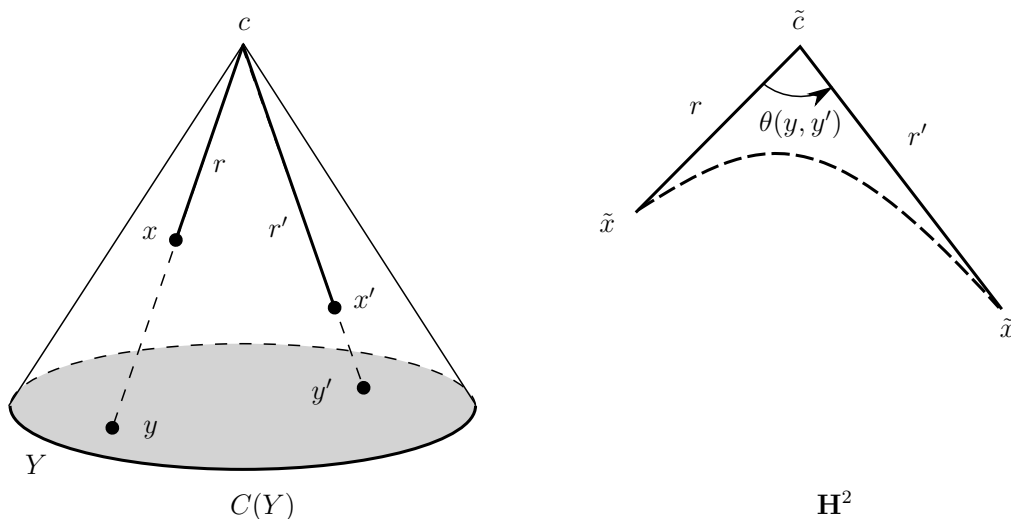


FIGURE 1: Interprétation géométrique de la métrique sur les cônes

Exemples.

- (i) Si Y est un cercle de périmètre $2\pi \operatorname{sh} \rho$ muni de la métrique de longueur, alors $C_\rho(Y)$ est exactement le disque hyperbolique de rayon ρ dans \mathbb{H}_2 .

- (ii) Si Y est isométrique à la droite réelle, alors $C_\rho(Y) \setminus \{c\}$ est le revêtement universel du disque hyperbolique épointé de rayon ρ .

Le cône $C(Y)$ est géodésique si et seulement s'il en est de même pour Y . Plus précisément si $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ sont deux points de $C(Y)$ alors deux cas se présentent. Si $r > 0$, $r' > 0$ et $d(y, y') < \pi \operatorname{sh} \rho$, alors les géodésiques de $C(Y)$ entre x et x' sont en bijection avec les géodésiques de Y entre y et y' . Dans tous les autres cas, il existe une unique géodésique reliant x et x' . Si en outre $y \neq y'$ alors cette géodésique est la concaténation des segments radiaux $[x, c] \cup [c, x']$, [2, Chapter I.5, Proposition 5.10].

Les deux exemples que nous avons proposés sont des espaces hyperboliques. Cela reste vrai quel que soit Y .

Proposition 7.5. *Le cône $C(Y)$ est 2δ -hyperbolique, où δ est la constante d'hyperbolicité du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .*

Démonstration. Soit $x_1 = (y_1, r_1)$, $x_2 = (y_2, r_2)$ et $x_3 = (y_3, r_3)$ trois points dans $C(Y)$. On peut toujours trouver un tripode T dont les sommets y_1^*, y_2^*, y_3^* vérifient pour tout $i, j \in 1, 2, 3$,

$$d_Y(y_i, y_j) = d_T(y_i^*, y_j^*)$$

Notons alors x_1^* , x_2^* et x_3^* les trois points du nouveau cône $C(T)$ définis comme $x_i^* = (y_i^*, r_i)$. De même on note c^* le sommet de $C(T)$. Il découle de la définition de la métrique dans les cônes que pour tout $p, q \in \{x_1, x_2, x_3, c\}$ on a

$$d_{C(Y)}(p, q) = d_{C(T)}(p^*, q^*) \quad (19)$$

Cependant $C(T)$ est un espace métrique obtenu en recollant le long d'une géodésique trois secteurs de disques de \mathbb{H}_2 (un secteur par branche du tripode). C'est donc un espace δ -hyperbolique. Par conséquent il vient

$$\langle x_1^*, x_3^* \rangle_{c^*} \geq \min \{ \langle x_1^*, x_2^* \rangle_{c^*}, \langle x_2^*, x_3^* \rangle_{c^*} \} - \delta.$$

Grâce à la relation (19) on a donc montré que pour tout $x_1, x_2, x_3 \in C(Y)$ on a

$$\langle x_1, x_3 \rangle_c \geq \min \{ \langle x_1, x_2 \rangle_c, \langle x_2, x_3 \rangle_c \} - \delta.$$

On a presque montré que $C(Y)$ était hyperbolique. En effet l'inégalité précédente ressemble à l'inégalité à quatre points, sauf que le point c est fixe ici. En fait on peut montrer que cette inégalité entraîne que $C(Y)$ est 2δ -hyperbolique (cf exercice ci-dessous). \square

Exercice 7.6. Soit X un espace métrique et o un point base de X . Soit $\delta \in \mathbb{R}_+$. On suppose que pour tout $x, y, z \in X$ on a

$$\langle x, z \rangle_o \geq \min \{ \langle x, y \rangle_o, \langle y, z \rangle_o \} - \delta.$$

Montrer que X est 2δ -hyperbolique. Voir [3, Chapitre 1, Proposition 1.2] pour une solution.

7.3 Espace cône.

Soient X un espace δ -hyperbolique et G un groupe agissant par isométries sur X . On se donne une famille de relations \mathcal{Q} . On se rappelle que l'objectif est d'étudier le quotient $\bar{G} = G/K$ où K est le sous-groupe normal de G engendré par $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{Q}\}$.

Pour le moment on ne fait aucune hypothèse type petite simplification sur \mathcal{Q} . On fixe en outre un paramètre $\rho > 0$. Sa valeur sera précisée plus tard. Il faut y penser comme à une très grande longueur. L'objectif est de changer d'espace métrique pour faire jouer à \mathcal{Q} de sorte que le groupe H associée à chaque paire (H, Y) se comporte comme un groupe elliptique. La première étape consiste à construire un nouvel espace hyperbolique. Elle n'utilise pas la structure de groupe sous-jacente.

Définition 7.7. *L'espace cône au-dessus de X relativement à \mathcal{Q} est obtenu en recollant pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ le cône $C_\rho(Y)$ sur X le long de Y grâce à l'application $\iota: Y \rightarrow C(Y)$. On le notera $\dot{X}_\rho(\mathcal{Q})$ ou simplement \dot{X} . L'ensemble des sommets de \dot{X} est noté $c(\mathcal{Q})$.*

Pour le moment \dot{X} n'est qu'un ensemble de points. On souhaite le munir d'une métrique. Il faut noter cependant que l'application $\iota: Y \rightarrow C(Y)$ qui permet de recoller un cône sur X est loin d'être une isométrie. Il n'est donc pas possible de trouver une distance sur \dot{X} pour laquelle les cônes $C(Y)$ et X seraient isométriquement plongés. Toutefois on peut munir \dot{X} d'une métrique de telle sorte que la longueur d'une courbe entièrement contenue dans $C(Y)$ (respectivement X) soit la même mesurée dans \dot{X} ou $C(Y)$ (respectivement ou X). En particulier les applications canoniques $C(Y) \rightarrow \dot{X}$ et $X \rightarrow \dot{X}$ sont des plongements 1-lipschitziens. Par ailleurs si c est le sommet du cône $C(Y)$, alors les distances de $C(Y)$ et \dot{X} coïncident sur la boule $B(c, \rho/3)$. Cette construction est détaillée dans [4].

Remarque. Pour simplifier l'exposition, non a omis une subtilité technique. Avec la métrique définie précédemment les cônes $C(Y)$ et l'espace cône \dot{X} n'est pas nécessairement géodésique. En toute rigueur il faut épaissir un peu les quasi-convexe Y de sorte que l'espace X devienne un *espace de longueur*, c'est à dire que la distance entre deux points $x, x' \in \dot{X}$ est l'infimum des longueur des chemins qui les relie (mais cette infimum n'est pas nécessairement atteint, autrement dit il n'existe pas toujours une géodésique entre x et x'). En fait, tout ce qu'on a fait jusqu'à présent n'utilise pas vraiment le fait que les espaces considérés soient géodésiques ou non. La géométrie δ -hyperbolique fonctionne tout aussi bien dans un espace de longueur. Pour simplifier notre propos on supposera toujours que \dot{X} est géodésique.

7.4 L'énoncé principal

Dans toute la suite δ désigne la constante d'hyperbolicité du plan hyperbolique \mathbb{H}_2 . C'est donc une constante « absolue ». Nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 7.8. *Il existe $\delta_0, \Delta_0, \rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$ avec les propriétés suivantes. Soit X un espace de longueur δ -hyperbolique. Soit G un groupe agissant par isométries sur X . Soit \mathcal{Q} une famille de relation. On note K le sous-groupe de G engendré par $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{Q}\}$ et \bar{G} le quotient $\bar{G} = G/K$. On fixe $\rho \geq \rho_0$. L'espace \bar{X} est le quotient de $\dot{X}_\rho(\mathcal{Q})$ par le groupe K . Si $\delta \leq \delta_0$, $\Delta(\mathcal{Q}, X) \leq \Delta_0$ et $\text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq 10\pi \text{sh } \rho$ alors*

- (i) \dot{X} est un espace de longueur $\dot{\delta}$ -hyperbolique avec $\dot{\delta} \leq 900\delta$.
- (ii) \bar{X} est un espace de longueur $\bar{\delta}$ -hyperbolique avec $\bar{\delta} \leq 64 \cdot 10^4 \delta$ sur lequel \bar{G} agit par isométries.
- (iii) il existe un sous-ensemble \mathcal{Q}_0 de \mathcal{Q} tel que K est isomorphe au produit libre

$$K \equiv \prod_{(H, Y) \in \mathcal{Q}_0} * H,$$

(iv) Soit $x \in X$ et \bar{x} son image dans \bar{X} . La projection $\dot{X} \rightarrow \bar{X}$ induit une isométrie de $B(x, \rho/40)$ sur $B(\bar{x}, \rho/40)$.

(v) Pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ la projection $G \rightarrow \bar{G}$ induit un plongement de $\text{Stab}(Y)/H$ dans \bar{G} .

Supposons en outre que \mathcal{Q}/G est fini et pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$, le quotient Y/H est borné. Si l'action de G sur X est propre et compacte alors il en est de même de celle de \bar{G} sur \bar{X} .

On notera que quitte à remplacer δ_0 et Δ_0 par des valeurs plus petites (respectivement ρ_0 par une valeur plus grande) on peut toujours supposer que

$$\max\{\delta_0, \Delta_0\} \ll \delta \ll \rho.$$

Il est très important de garder ces ordres de grandeurs en tête tout au long de la preuve.

Renormalisation. Dans l'énoncé précédent, on demande un contrôle absolu sur δ , $\Delta(\mathcal{Q}, X)$ et $\text{inj}(\mathcal{Q}, X)$ et non un contrôle relatif comme dans la condition de petite simplification. Toutefois le [Théorème 6.9](#) découpe du précédent grâce à un jeu de renormalisation.

Démonstration des théorèmes 6.8 et 6.9. Notons δ_0 , Δ_0 et ρ_0 les constantes données par le [Théorème 7.8](#). Soit $D \geq 0$. On choisit $\rho \geq \max\{\rho_0, 1000D\delta_0\}$. On pose alors

$$A = \frac{10\pi \text{sh } \rho}{\delta_0} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\Delta_0}{10\pi \text{sh } \rho}.$$

Soient X un espace géodésique δ -hyperbolique et G un groupe agissant par isométries sur X . On se donne une famille de relations \mathcal{Q} satisfaisant la condition $C''(\lambda, A)$. Comme précédemment K est le sous-groupe distingué engendré par $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{Q}\}$ et \bar{G} le quotient G/K . On définit un paramètre sans dimension a comme suit

$$a = \min \left\{ \frac{\delta_0}{\delta}, \frac{\Delta_0}{\Delta(\mathcal{R}, X)} \right\}.$$

Au lieu de travailler avec X , on regarde l'action de G sur l'espace renormalisé aX . On construit alors $\dot{X}_\rho(\mathcal{Q})$ l'espace cône de rayon ρ au-dessus de aX relativement à \mathcal{Q} . On appelle \bar{X} le quotient $\dot{X}_\rho(\mathcal{Q})/K$. Par construction l'espace aX est δ_0 -hyperbolique. En outre la famille \mathcal{Q} y vérifie $\Delta(\mathcal{Q}, aX) \leq \Delta_0$. Penchons-nous maintenant sur $\text{inj}(\mathcal{Q}, X)$. Puisque \mathcal{Q} satisfait la condition $C''(\lambda, A)$ on a dans X

$$\text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq \max \left\{ A\delta, \frac{\Delta(\mathcal{Q}, aX)}{\lambda} \right\}.$$

Après renormalisation on obtient dans l'espace aX

$$\text{inj}(\mathcal{Q}, aX) \geq a \max \left\{ A\delta, \frac{\Delta(\mathcal{Q}, aX)}{\lambda} \right\} \geq \max \left\{ A\delta_0, \frac{\Delta_0}{\lambda} \right\} \geq 10\pi \text{sh } \rho.$$

Ainsi aX , G et \mathcal{Q} vérifient les hypothèses du [Théorème 7.8](#). Ainsi

- (i) Il existe une partie \mathcal{Q}_0 de \mathcal{Q} telle que K est isomorphe au produit libre $*_{(H, Y) \in \mathcal{Q}_0} H$.
- (ii) Pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$, le groupe $\text{Stab}(Y)/H$ se plonge dans \bar{G} .

- (iii) Soit $g \in G \setminus \{1\}$ tel que $\|g\| \leq D\delta$. Supposons que contrairement à ce qui a été annoncé son image $\bar{g} \in \bar{G}$ est triviale. Notre hypothèse sur g porte sur sa longueur de translation mesurée dans X . Après renormalisation il vient

$$\|g\|_{aX} \leq D\delta_0 \leq \frac{\rho}{1000}.$$

On distingue alors deux cas. Supposons d'abord que g agit trivialement sur X (c'est à dire $gx = x$ pour tout $x \in X$). En particulier g appartient à $\text{Stab}(Y)$ pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$. Or l'application $G \rightarrow \bar{G}$ induit un plongement de $\text{Stab}(Y)/H$ dans \bar{G} . Aussi $g \in H \setminus \{1\}$. Par conséquent

$$\|g\|_{aX} \geq \text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq 10\pi \text{sh } \rho,$$

ce qui contredit notre hypothèse. On peut donc supposer que l'action de g sur X n'est pas triviale. En particulier il existe un point $x \in aX$ tel que

$$0 < d_{aX}(gx, x) \leq \frac{\rho}{500}.$$

L'application $aX \rightarrow \dot{X}$ est un plongement 1-Lipschitz, aussi

$$0 < d_{\dot{X}}(gx, x) \leq \frac{\rho}{500}.$$

D'après le [Théorème 7.8](#), l'application \dot{X} to \bar{X} induit une isométrie de $B(x, \rho/40)$ sur la boule $B(\bar{x}, \rho/40)$ où \bar{x} est l'image de x dans \bar{X} . Par conséquent $d_{\bar{X}}(\bar{g}\bar{x}, \bar{x}) > 0$ et \bar{g} ne peut pas être trivial.

- (iv) L'espace \bar{X} est hyperbolique.

Cette liste termine la preuve du [Théorème 6.9](#). Il nous reste à montrer que tous les hypothèses du [Théorème 6.8](#) le groupe \bar{G} est hyperbolique. Supposons donc que \mathcal{Q}/G fini et pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ le quotient Y/H est borné. Si l'action de G sur X est propre est co-compacte (comme dans les hypothèses du [Théorème 6.8](#)) alors il en est de même de l'action de \bar{G} sur \bar{X} . En particulier \bar{G} est hyperbolique. □

7.5 Première étape : la géométrie de l'espace cône

Dans cette partie on va montrer l'énoncé suivant.

Proposition 7.9 ([10, 7]). *Il existe des constantes $\delta_0 > 0$, $\Delta_0 > 0$ et $\rho_0 > 0$ qui ne dépendent pas de X , G ou \mathcal{Q} avec les propriétés suivantes. Si $\delta \leq \delta_0$, $\rho \geq \rho_0$ et $\Delta(\mathcal{Q}, X) \leq \Delta_0$, alors l'espace cône \dot{X} est 900δ -hyperbolique, où δ est la constante d'hyperbolicité du plan hyperbolique \mathbb{H}_2 .*

Cet énoncé correspond au point (i) du [Théorème 7.8](#). La preuve utilise la même stratégie que celle de la stabilité des quasi-géodésiques. Dans un premier temps on démontre l'énoncé dans un cas limite (en particulier lorsque X est un arbre). Ensuite on prouve avec un argument limite que le résultat reste vrai si on « perturbe » un peu la métrique. La mise en œuvre de la démonstration s'avère toutefois assez technique [4]. Notons que cette proposition n'utilise pas du tout la structure de groupe de G ou de la famille \mathcal{Q} . Il s'agit juste de recoller des cônes sur des parties quasi-convexes de X . Commençons par regarder le cas limite.

Fait 7.10. Soient T un arbre réel et \mathcal{S} une famille de sous-arbres de T . On suppose que deux éléments distincts de \mathcal{S} ont au plus un point commun. Alors l'espace \hat{T} , obtenu en recollant pour tout $S \in \mathcal{S}$ le cône $C(S)$ sur T , est 2δ -hyperbolique.

On peut voir ici \hat{T} comme l'union d'une collection \mathcal{P} de parties 2δ -hyperboliques de T : les cônes et les composantes connexes de $T \setminus \cup_{S \in \mathcal{S}} S$. Les éléments de \mathcal{P} sont arrangés selon une structure d'arbre. En outre, deux éléments distincts de \mathcal{P} ont au plus un point commun. Lorsqu'on attache en un point deux espaces 2δ -hyperboliques, le résultat reste 2δ -hyperbolique. Il en découle que \hat{T} est 2δ -hyperbolique. La preuve du cas général repose sur le fait suivant.

Fait 7.11. Il existe des constantes $\delta_0 > 0$, $\Delta_0 > 0$ et $\rho_0 > 0$ qui ne dépendent pas de X , G ou \mathcal{Q} avec les propriétés suivantes. Si $\delta \leq \delta_0$, $\rho \geq \rho_0$ et $\Delta(\mathcal{Q}, X) \leq \Delta_0$, alors toute boule de rayon $\rho/100$ de l'espace \hat{X} est 3δ -hyperbolique.

Cet énoncé est une perturbation du fait précédent. On le démontre par l'absurde. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n = \Delta_n = 1/n$. Si le fait était faux on pourrait trouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un espace δ_n -hyperbolique X_n , une famille de relations \mathcal{Q}_n avec $\Delta(\mathcal{Q}_n, X_n) \leq \Delta_n$ et un point $x_n \in \hat{X}_n$ tels que la boule $B(x_n, \rho/100)$ n'est pas 3δ -hyperbolique. Notons que x_n est à distance au plus $3\rho/4$ de X_n . Dans le cas contraire il existerait $(H, Y) \in \mathcal{Q}_n$ tel que $B(x_n, \rho/100)$ soit entièrement contenue dans le cône $C(Y)$. Or la métrique de $C(Y)$ et celle de \hat{X}_n coïncident près du sommet. Puisque $C(Y)$ est 2δ -hyperbolique, il en serait de même de $B(x_n, \rho/100)$. Ainsi il existe un point x_n^0 de X_n tel que $B(x_n, \rho/100)$ est contenu dans $B(x_n^0, \rho)$. L'idée est maintenant de « passer à la limite ». Pour cela on fixe un ultra-filtre non principal ω . On appelle T la limite de la suite d'espaces métriques pointés (X_n, x_n^0) selon ω . C'est un espace géodésique 0-hyperbolique, c'est-à-dire un arbre réel. De façon analogue on peut regarder la limite de (\mathcal{Q}_n) (on oublie ici la structure de groupe et on ne regarde que les parties quasi-convexes). Cela fournit une famille \mathcal{S} de sous-arbres de T . Puisque $\Delta(\mathcal{Q}_n, X_n)$ tend vers 0, deux de ces sous-arbres ont au plus un point commun. D'après le fait précédent, l'espace cône \hat{T} relativement à \mathcal{S} est 2δ -hyperbolique. Or $B(x_n^0, \rho)$ converge vers une boule de rayon ρ de \hat{T} . Il en découle que cette boule est également 2δ -hyperbolique. Par conséquent il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(x_n^0, \rho)$ – et donc $B(x_n, \rho/100)$ – est 3δ -hyperbolique. Contradiction.

Remarques

- L'argument énoncé ci-dessus fait l'impasse sur quelques points techniques. On utilise implicitement le fait que l'espace cône \hat{T} au-dessus de $T = \lim_{\omega} X_n$ est isométrique à la limite des espaces cônés \hat{X}_n au-dessus X_n . Ceci n'est pas vrai en général : l'espace \hat{T} est plus petit. Toutefois on a une isométrie sur les boules de rayon ρ dont le centre est dans T . Ce qui est suffisant pour la démonstration.
- Vu l'ordre des quantificateurs dans le Fait 7.11, le rayon ρ utilisé pour construire l'espace cône \hat{X}_n n'est pas nécessairement le même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier ρ peut tendre vers l'infini (il ne peut pas tendre vers 0 puisque $\rho \geq \rho_0$). L'espace cône \hat{T} à la limite est alors obtenu en recollant non pas des cônes mais des horoboules. Dans ce cas \hat{T} reste 2δ -hyperbolique. Le reste de la preuve est inchangé.

Pour compléter la preuve de la Proposition 7.9, on utilise une variation sur le théorème de Cartan-Hadamard énoncé ci-dessus. On dit qu'un espace métrique est ε -*simplement connexe*, si tout lacet γ de X est homotope à un produit de lacets $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ qui sont chacun librement

homotopes à un lacet de diamètre au plus ε . Dit avec les mains, toute boucle se décompose en un produit de petites boucles de diamètre au plus ε .

Exercice 7.12. Soit G un groupe de type fini et S une partie génératrice finie de G . Montrer qu'un groupe est de présentation finie si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Cay}(G, S)$ est ε -simplement connexe.

Exercice 7.13. Montrer qu'un espace géodésique δ -hyperbolique X est 100δ -simplement connexe. Si $\gamma: [0, 1]$ est un lacet de X , on pourra subdiviser $[0, 1]$ en $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1$ de sorte que pour tout $i \in [0, m-1]$ le diamètre de γ restreint à $[t_i, t_{i+1}]$ est au plus δ , puis découper ce chemin en reliant chaque point $\gamma(t_i)$ à $\gamma(0) = \gamma(1)$ par une géodésique.

Théorème 7.14 (Cartan-Hadamard bis). Soit $\sigma, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sigma > 10^{10}\delta$. Soit X un espace géodésique $10^{-5}\sigma$ -simplement connexe. Si toutes les boules de rayon σ dans X sont δ -hyperbolique, alors X est (globalement) 300δ -hyperbolique.

Il nous faut donc montrer que \dot{X} est presque simplement connexe. Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow \dot{X}$ un lacet de \dot{X} . Quitte perturber un peu ce lacet on peut toujours supposer qu'il évite les sommets de l'espace cône. En effet cette perturbation s'obtient en multipliant γ par des lacets librement homotopes à des boucles de diamètre au plus δ_0 (faire un dessin). Chaque cône épointé $C(Y) \setminus \{c\}$ vient avec une projection $C(Y) \setminus \{c\} \rightarrow Y$ qui envoie le point $x = (y, r)$ sur y . Ces projections s'étendent en une projection G -equivariante $p: \dot{X} \setminus c(\mathcal{Q}) \rightarrow X$, qui est en fait une retraction de $\dot{X} \setminus c(\mathcal{Q})$ sur X . Par conséquent γ est homotope à un lacet de X (et non plus de \dot{X}). Puisque X est δ_0 -hyperbolique, γ se décompose en un produit de lacets $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ qui sont chacun librement homotopes à un lacet de diamètre au plus $100\delta_0$. Il en découle que \dot{X} est $100\delta_0$ -simplement connexe. On notera que $\delta_0 \ll \rho/100$. On peut donc appliquer le théorème de Cartan-Hadamard à \dot{X} ce qui termine la preuve de la [Proposition 7.9](#).

7.6 Qu'a-t-on gagné à ce changement d'espace ?

Soit $(H, Y) \in \mathcal{Q}$. Puisque H préserve Y , il fixe le sommet c du cône Y . Plus précisément l'action par translation de H sur Y se transforme en une action par rotation de H sur $C(Y)$. Par ailleurs les sommets des différents cônes sont très éloignés les uns des autres : leur distance est au moins $2\rho \gg \delta$. Moralement les groupes H se comportent maintenant comme des groupes de rotations dont les centres sont très éloignés. On va voir que l'hypothèse de petite simplification entraîne que les groupes H agissent comme des rotations de très grand angles. Cela va nous permettre de contrôler l'action du sous-groupe $K = \langle H \mid (H, Y) \in \mathcal{Q} \rangle$ sur \dot{X} puis la géométrie du quotient $\dot{X} = \dot{X}/K$.

Pour expliquer toutes ces idées (et bien gérer les ordres de grandeurs) on se place dans le cadre suivant. On note δ_0 , Δ_0 et ρ_0 les constantes données par la [Proposition 7.9](#). On a toujours un groupe G agissant par isométries sur un espace géodésique δ -hyperbolique X , ainsi qu'une famille de relations \mathcal{Q} . On fixe un rayon $\rho \geq \max\{\rho_0, 10^{1000}\delta\}$. On suppose en outre que les hypothèses de la [Proposition 7.9](#) sont vérifiées, i.e.

$$\delta \leq \delta_0 \quad \text{et} \quad \Delta(\mathcal{Q}, X) \leq \Delta_0,$$

de sorte que l'espace $\dot{X}_\rho(\mathcal{Q})$ est $\dot{\delta}$ -hyperbolique avec $\dot{\delta} = 900\delta$. Notre choix de ρ entraîne que $\rho \gg \dot{\delta}$. On fait maintenant une hypothèse supplémentaire en demandant que

$$\text{inj}(\mathcal{Q}, X) \geq 100\pi \text{sh } \rho.$$

Considérons maintenant $(H, Y) \in \mathcal{Q}$. Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y', r)$ deux points de $C(Y)$ à distance au moins 20δ du sommet c et tels que $\langle x, x' \rangle_c > 5\delta$. Cette hypothèse est une manière de dire que l'angle en c entre x et x' est petit. Il en découle que $d(y, y') < \pi \sin \rho$ et donc pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, on a $d(y, hy') > \pi \operatorname{sh} \rho$. La formule de distance dans un cône, nous informe alors que $d(x, hx') = r + r'$. Ce qui entraîne que la géodésique entre x et x' passe par le sommet c . Autrement dit l'angle en c entre x et hx' est grand (au moins π). On a donc démontré le lemme suivant

Lemme 7.15. *Soit $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ et c le sommet de $C(Y)$. Soit $x, x' \in C(Y) \setminus B(c, 20\delta)$. Si $\langle x, x' \rangle_c > 5\delta$ alors pour tout $h \in H$ on a $\langle x, hx' \rangle_c = 0$.*

On dit que l'ensemble $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{Q}\}$ forme une famille de rotations de \dot{X} .

Exercice 7.16. Soit $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ et c le sommet de $C(Y)$. A partir du lemme précédent montrer que pour tout $x, x' \in \dot{X}$, pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, on a $\langle x, hx' \rangle_c \leq 100\delta$.

7.7 Seconde étape : les famille de rotations.

Pour cette partie on renvoie à [5, Section 2]. Le cadre des familles de rotations permet de montrer le résultat suivant

Théorème 7.17. *Sous les hypothèses précédentes,*

(i) *il existe une partie \mathcal{Q}_0 de \mathcal{Q} telle que K est isomorphe au produit libre*

$$K \equiv \underset{(H,c) \in \mathcal{Q}_0}{*} H ;$$

(ii) *pour tout $g \in K$, soit il existe $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ tel que $g \in H$, soit $\|g\|_{\dot{X}} \geq \rho$.*

Le premier item correspond au point (iii) du Théorème 7.8. Concentrons-nous maintenant sur le quotient $\bar{G} = G/K$. Cette étude repose presque entièrement sur le point (ii) du Théorème 7.17.

Proposition 7.18. *Pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$, la projection canonique $G \rightarrow \bar{G}$ induit un plongement de $\operatorname{Stab}(Y)/H$ dans \bar{G} .*

Remarque. Cette proposition correspond au point (v) du Théorème 7.8.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $(H, Y) \in \mathcal{Q}$, on a $K \cap \operatorname{Stab}(Y) = H$. Supposons que $g \in \operatorname{Stab}(Y) \cap K$. En particulier g doit fixer le sommet c du cône $C(Y)$, par conséquent sa longueur de translation est nulle. Le théorème précédent nous dit alors qu'il existe $(H', Y') \in \mathcal{Q}$ tel que $g \in H'$. A priori, il se pourrait que (H, Y) et (H', Y') soient distincts, on a vu que ce n'est pas le cas. Notons c' le sommet du cône $C(Y')$ et supposons que $c' \neq c$. L'Exercice 7.16 nous dit que si g n'est pas trivial alors que $\langle c, hc \rangle_{c'} \leq 100\delta$. Or $d(c, c') \geq 2\rho$. Aussi g ne peut fixer c . Par conséquent, soit g est trivial, et donc appartient à H , soit $(H, Y) = (H', Y')$ et g appartient a fortiori à H . \square

Attardons-nous maintenant sur l'espace $\bar{X} = X/K$. Toujours en vertu du Théorème 7.17, l'action de K sur $X \setminus c(\mathcal{Q})$ est proprement discontinue. Aussi \bar{X} hérite d'une structure d'espace métrique géodésique. L'objectif est de montrer que cet espace est hyperbolique. L'ingrédient clef de la preuve est encore le théorème de Cartan-Hadamard. Il suffit dans notre cas de montrer que \bar{X} est « presque » simplement connexe et localement hyperbolique. Soient x un point de X et \bar{x} son image dans

\bar{X} . Supposons d'abord que pour tout $c \in c(\mathcal{Q})$, $d(x, c) \geq \rho/20$. Soit $g \in K \setminus \{1\}$. D'après le [Théorème 7.17](#), si g n'est pas dans un groupe de rotations, sa longueur de translation est au moins $\rho/2$. À l'inverse, si g est contenu dans un groupe de rotations, l'[Exercice 7.16](#) assure que $d(gx, x) \geq \rho/10$. Il en découle que la projection $X \rightarrow \bar{X}$ induit une isométrie de $B(x, \rho/40)$ sur $B(\bar{x}, \rho/40)$, ce qui correspond au point (iv) du [Théorème 7.8](#). En particulier $B(\bar{x}, \rho/40)$ est δ -hyperbolique. Supposons maintenant qu'il existe $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ tel que $d(x, c) \leq \rho/20$ où c est le sommet du cône $C(Y)$. On appelle \bar{c} l'image du sommet c dans \bar{X} . Dans ce cas $B(\bar{x}, \rho/40)$ est un boule contenu dans le cône $C(Y)/H$ qui est isométrique à $C(Y/H)$ (exercice). Par conséquent elle est 2δ -hyperbolique ([Proposition 7.5](#)) Ainsi toutes les boules de rayon $\rho/40$ de \bar{X} sont 10δ -hyperboliques.

En tant qu'espace hyperbolique, X est 100δ -simplement connexe ([Exercice 7.13](#)). Puisque le groupe K est engendré par des éléments elliptiques (dont la longueur de translation est au plus 20δ), il en est de même pour \bar{X} . Rappelons que ρ a été choisi très grand devant δ . En appliquant le théorème de Cartan-Hadamard, on obtient le résultat suivant, qui correspond au point (ii) du [Théorème 7.8](#).

Théorème 7.19. *L'espace \bar{X} est $\bar{\delta}$ -hyperbolique avec $\bar{\delta} \leq 64 \cdot 10^4 \delta$.*

7.8 Un exemple d'utilisation de \bar{X}

On se place sous les hypothèse du [Théorème 7.8](#).

Proposition 7.20. *Soit \bar{E} un sous-groupe elliptique de \bar{G} (pour son action sur \bar{X}). Alors l'une des deux propriétés est vraie.*

- (i) *Il existe un sous-groupe elliptique E de G (pour son action sur X) tel que la projection $\pi: G \rightarrow \bar{G}$ induit un isomorphisme de E sur \bar{E} .*
- (ii) *Il existe $(H, Y) \in \mathcal{Q}$, tel que \bar{E} est contenu dans $\text{Stab}(Y)/H$.*

Démonstration. Puisque \bar{E} est elliptique, il existe un point $\bar{x} \in \bar{X}$ tel que le diamètre de l'orbite est au plus $6\bar{\delta}$ ([Corollaire 5.15](#)). On distingue maintenant deux cas. Supposons d'abord qu'il existe $(H, Y) \in \mathcal{Q}$ tel que $d(\bar{c}, \bar{x}) < \rho - 3\bar{\delta}$, où \bar{c} est l'image dans \bar{X} du sommet c du cône $C(Y)$. Il découle de l'inégalité triangulaire que $d(\bar{g}\bar{c}, \bar{c}) < 2\rho$ pour tout $\bar{g} \in \bar{E}$. Or deux sommets distincts de \bar{X} sont à une distance au moins 2ρ . Aussi \bar{E} n'a d'autre choix que de fixer \bar{c} , ce qui entraîne que \bar{E} est un sous-groupe de $\text{Stab}(Y)/H$. Supposons maintenant que pour tout sommet $c \in c(\mathcal{Q})$ on a $d(\bar{c}, \bar{x}) \leq 3\bar{\delta}$, où \bar{c} est l'image de c dans \bar{X} . En bougeant un peu le point \bar{x} , on observe qu'il existe un point $x' \in X$ dont l'image \bar{x}' dans \bar{X} vérifie la propriété suivante : l'orbite $\bar{E}\bar{x}'$ est de diamètre au plus $12\bar{\delta}$. On notera que le point x' est dans X et non dans un des cônes $C(Y)$. Il en découle que la projection $\dot{X} \rightarrow \bar{X}$ induit une isométrie de $B(x, \rho/40)$ sur $B(\bar{x}', \rho/40)$. On se rappelle que $\rho \gg \bar{\delta}$. En particulier, pour tout $\bar{g} \in \bar{E}$, il existe une pré-image $g \in G$ de \bar{g} telle que $d_{\dot{X}}(gx', x') \leq 12\bar{\delta}$. Notons E l'ensemble des éléments g obtenu de la sorte. On affirme que E est un sous-groupe de \bar{G} . Prenons en effet $g_1, g_2 \in E$ et notons \bar{g}_1 et \bar{g}_2 leur images dans \bar{E} . Une pré-image $h \in G$ de $\bar{g}_1\bar{g}_2$ vérifie $d_{\dot{X}}(hx', x') \leq 12\bar{\delta}$. Par ailleurs l'inégalité triangulaire nous dit que

$$d_{\dot{X}}(g_1g_2x', x') \leq d_{\dot{X}}(g_1x', x') + d_{\dot{X}}(g_2x', x') \leq 24\bar{\delta}.$$

Aussi $d_{\dot{X}}(h^{-1}g_1g_2x', x') \leq 36\bar{\delta}$. Or, puisque h est une pré-image de $\bar{g}_1\bar{g}_2$, l'élément $h^{-1}g_1g_2$ est dans K . En appliquant le [Théorème 7.17](#) on voit que $h^{-1}g_1g_2$ est nécessairement trivial (sinon il

déplacerait beaucoup trop x'). Autrement dit $g_1 g_2 \in E$. L'ensemble E est clairement stable par inverse et contient 1, donc E est un sous-groupe de E . Par ailleurs l'orbite Ex' est de diamètre au plus $12\bar{\delta}$ par construction, il en découle que E est elliptique (pour son action sur \dot{X}). Il reste à voir que Ex' est borné en tant que sous-espace de X . Comme le diamètre de Ex' est petit devant ρ , c'est une conséquence (qui demande toutefois un « petit » argument) de la construction de cône off. \square

Corollaire 7.21. *Soit $\lambda \in (0, 1/6)$. Soit $\bar{G} = \langle S \mid R \rangle$ un groupe donné par une présentation vérifiant l'hypothèse de petite simplification $C''(\lambda)$. Soit $\bar{g} \in \bar{G}$. Si \bar{g} est d'ordre fini, alors il existe une relation $r \in R$ de la forme $r = u^k$ où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que \bar{g} est conjugué à une puissance de \bar{u} (l'image de u dans \bar{G}).*

Autrement dit, le seul moyen de produire de la torsion dans des groupes à petite simplification, est d'ajouter explicitement des relations qui sont des puissances. La proposition précédente ne permet de montrer le résultat que si $\lambda \ll 1$. L'énoncé reste cependant vrai si $\lambda < 1/6$.

Pour aller plus loin. Le séminaire Bourbaki n°1089 sur le sujet

<https://youtu.be/q-SjS6rbgz4>